7. Построение эпюр внутренних усилий для кривых стержней

Кроме стержней с прямой осью в конструкциях довольно часто встречаются элементы, у которых ось, то есть линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений, является кривой.

Так же, как и в рамах, в кривых стержнях действуют поперечные и нормальные силы и изгибающие моменты. В кривом стержне:

– *изгибающий момент* равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно его центра тяжести;

– *поперечная сила* равна алгебраической сумме проекций на вертикальную ось сечения всех сил, расположенных по одну сторону от него;

– *нормальная сила* равна алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на касательную к оси кривого стержня, проведенную в рассматриваемом сечении.

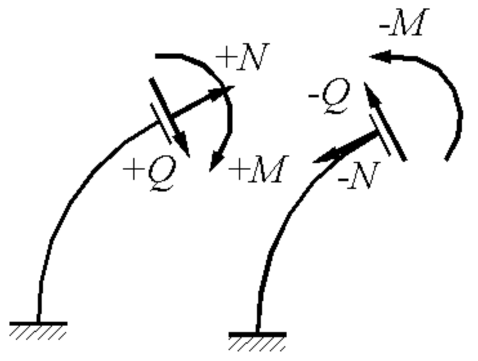

Рис. 5.34

Изгибающий момент считается положительным, если он *увеличивает кривизну* стержня (Рис. 5.34). Нормальную силу будем считать положительной, если она стремится *оторвать отброшенную часть стержня от оставленной*. Поперечную силу считаем положительной, когда она получается из *положительного направления нормальной силы поворотом по часовой стрелке на 90°*.

Приведенные выше правила знаков для изгибающего момента, нормальной и поперечной сил не зависят от того, правую или левую часть кривого *стержня* мы оставляем для их вычисления.

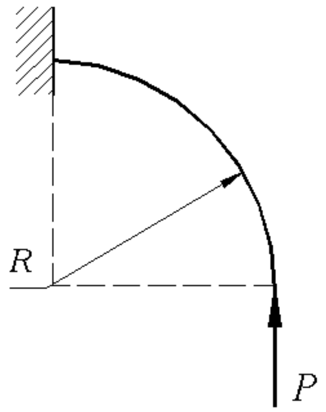

Рис. 5.35

Рассмотрим пример построения эпюр M, Q и N для изображенного на рисунке стержня, представляющего собой четверть окружности радиусом R = 1 м. защемленного одним концом и нагруженного на другом силой P = 10 кН (Рис. 5.35).

Проведем произвольное сечение из центра окружности. Положение сечения определим углом φ, составленным им с осью абсцисс.

Проецируем силу P на ось сечения и касательную, проведенную к данному сечению.

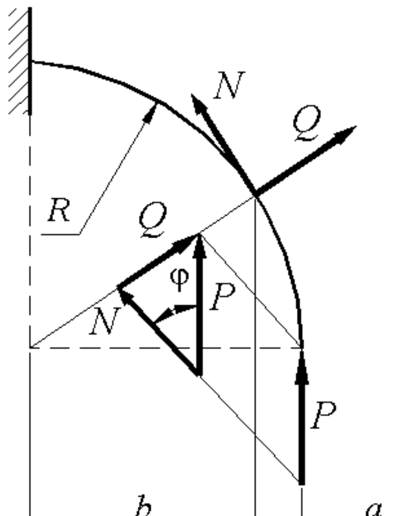

Рис. 5.36

Видно (Рис. 5.36), что угол, составленный силами P и N, равен φ. Следовательно, можем записать:

$$Q = -P\sin\varphi;\ N = -P\cos\varphi.$$

Изгибающий момент будем определять по формуле:

$$M = -Pa;$$

в свою очередь $a = R - b$, $b = R\cos\varphi$,

то есть $a = R - R\cos\varphi$, или

$$a = R(1 - \cos\varphi),\ \text{тогда}$$

$$M = -PR(1 - \cos\varphi).$$

Подставим в полученные уравнения внутренних усилий числовые значения P и R, а также углы φ равные 0°, 30°, 60° и 90°, а результаты расчетов сведем в таблицу 5.1.

Т а б л и ц а 5.1

φ	$M = -PR(1 - \cos\varphi)$	$Q = -P\sin\varphi$	$N = -P\cos\varphi$
0°	0	0	–10,0
30°	–1,4	–5,0	–8,6
60°	–5,0	–8,6	–5,0
90°	–10,0	–10,0	0

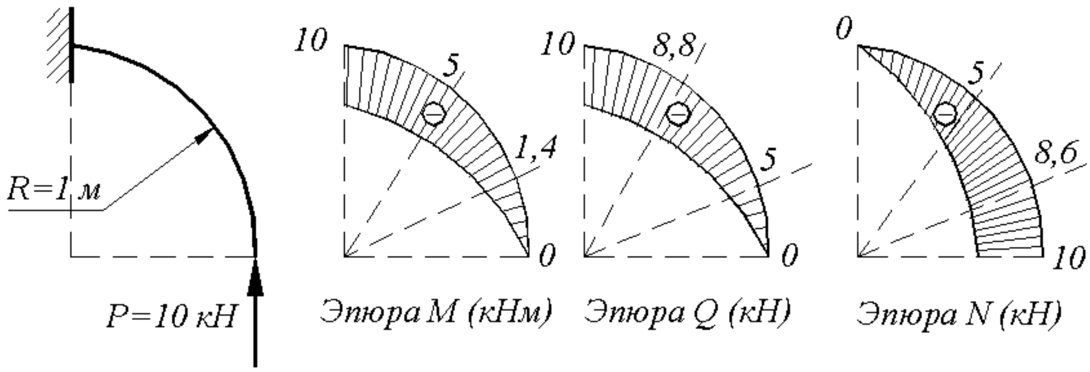

Рис. 5.37

По полученным данным строим эпюры (Рис. 5.37).

Пример 5.6. Для заданного кривого стержня построить эпюры Q, M и N (Рис. 5.52, а).

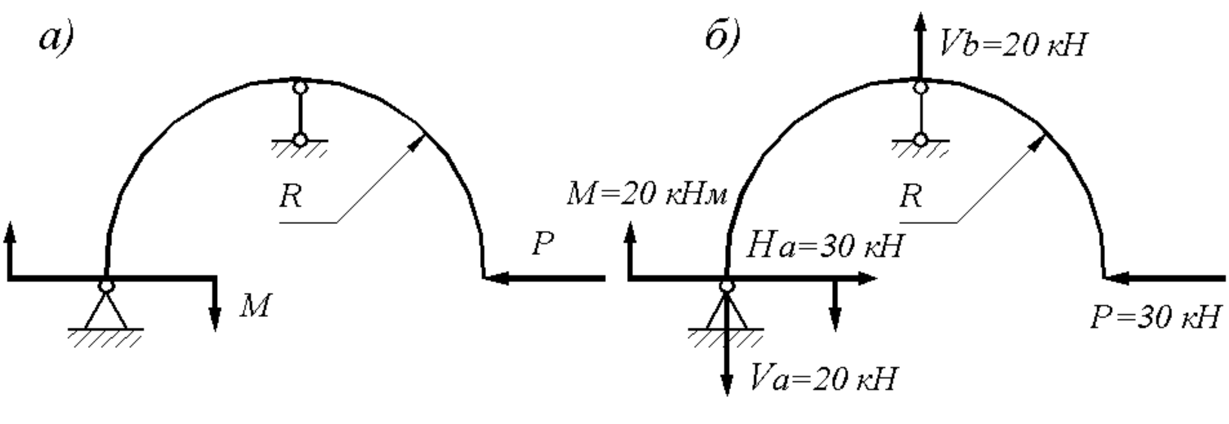

Рис. 5.52

Р е ш е н и е. Определяем величину опорных реакций при R = 1 м.

$\Sigma M_a = -1V_в + M = 0$; $V_b = 20$ кН.

$\Sigma Y = -V_a + V_b = 0$; $V_a = V_b = 20$ кН.

$\Sigma X = P - H_a = 0$; $H_a = P = 30$ кН.

Разбиваем стержень на два силовых участка и на каждом из них проводим радиальные сечения под произвольным углом φ. Будем рассматривать внешние усилия, лежащие справа от первого сечения и слева– от второго.

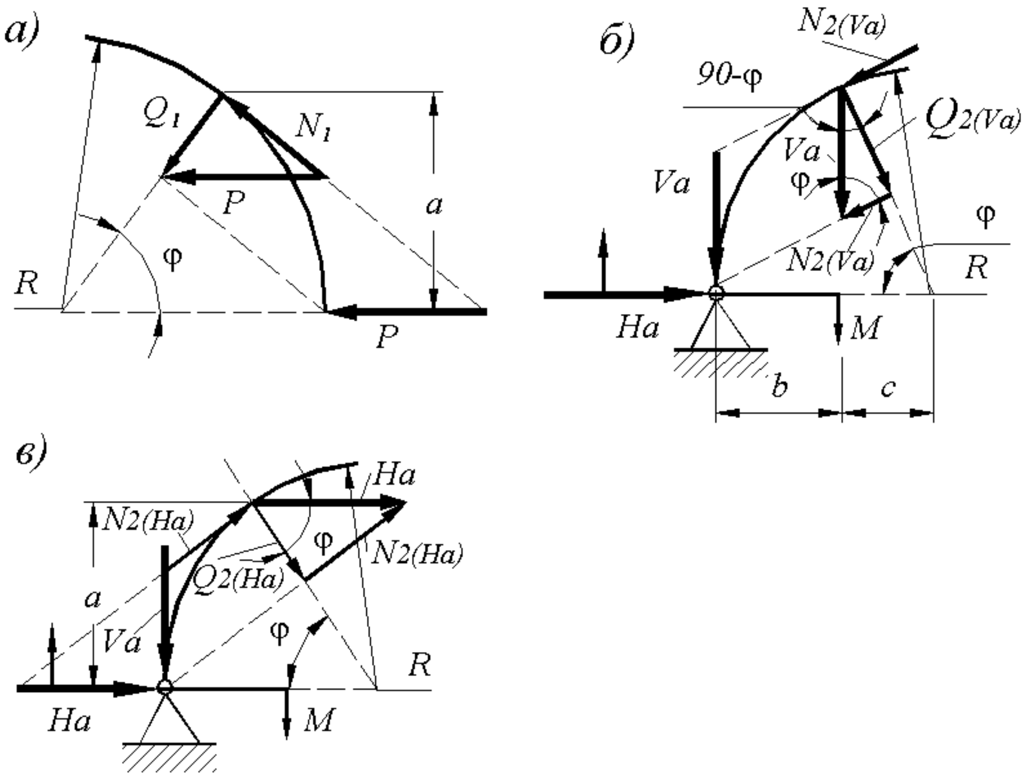

Рис. 5.53

Первый участок (Рис. 5.53, а):

$Q_1 = P\cos\varphi$; $M_1 = P \cdot a = P \cdot R\cos\varphi$; $N_1 = -P\sin\varphi$; $0 \le \varphi \le 90°$.

Подставляем в полученные зависимости для внутренних сил значения углов φ равные 0, 30, 60 и 90°. Полученные таким образом данные заносим в таблицу 5.2.

Таблица 5.2

φ	Q, в кН	M, в кНм	N, в кН
0°	30,0	0	0
30°	25,8	15,0	–15,0
60°	15,0	25,8	–25,8
90°	0	30,0	–30,0

Второй участок (Рис. 5.53, б)*:*

Рассматриваем в отдельности действие горизонтальной реакции H_a и вертикальной $V_в$.

$Q_2 = –H_a\cos\varphi – V_a\sin\varphi$. $M_2 = H_aR\sin\varphi + V_ab – M$, где

$b = R – c$, а $c = R \cos\varphi$, тогда $b = R – R\cos\varphi$;

$M_2 = H_aR\sin\varphi + V_a (R – R \cos\varphi) – M$, или

$M_2 = H_aR\sin\varphi +V_aR (1 – \cos\varphi) – M$. $N_2 = – H_a\cos\varphi + V_a\sin\varphi$.

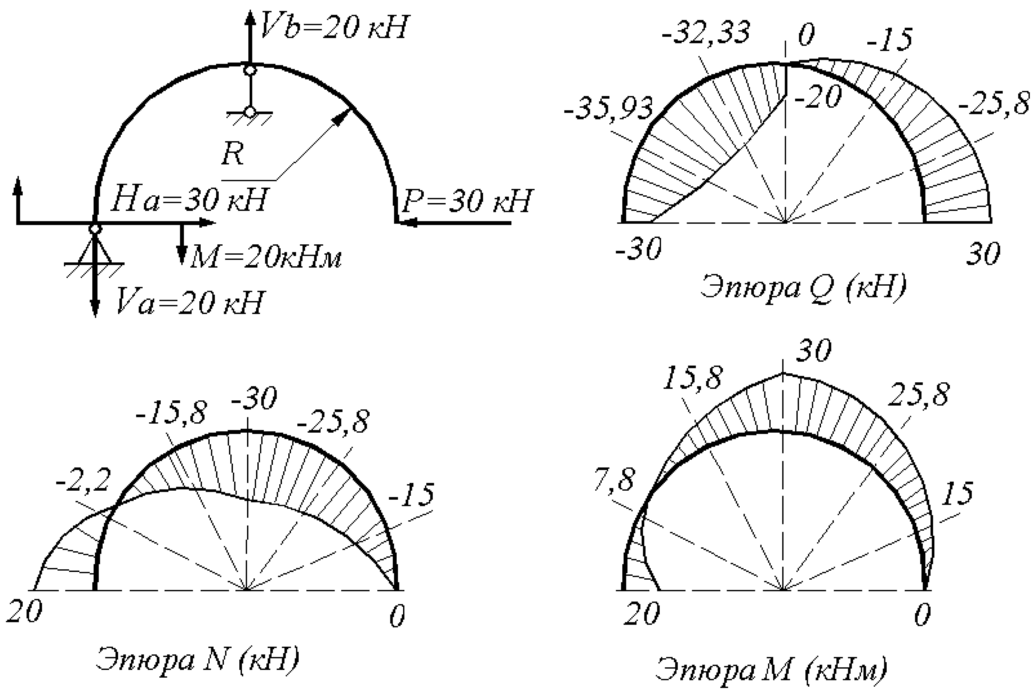

Рис. 5.54

Подставляем в полученные зависимости для внутренних усилий значения углов φ равные 0, 30, 60 и 90°. Значения Q_2, M_2 и N_2 заносим в таблицу 5.3.

Таблица 5.3

φ	Q, в кН	M, в кНм	N, в кН
0°	–30,00	–20,0	20,0
30°	–35,98	–7,2	2,2
60°	–32,32	15,8	–15,8
90°	–20,00	30,0	–30,0

По данным таблицы строим эпюры (Рис. 5.54).