Базис и размерность линейного пространства

• Вектор $\overline{a_n}$ называется *линейной комбинация векторов* $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\ \overline{a_{n-1}}$ линейного пространства, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа

$$\overline{a_n} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_{n-1} \overline{a_{n-1}},$$

где λ_1, λ_2, …, λ_{n-1} — любые действительные числа.

• Векторы $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\ \overline{a_n}$ линейного пространства называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа λ_1, λ_2, …, λ_n, неравные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

(1)

• Векторы $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\ \overline{a_n}$ линейного пространства называются *линейно независимыми*, если

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + ... + \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

только при $\lambda_1 = \lambda_2 = … = \lambda_n = 0$

Пример:

Выяснить, являются ли векторы $\overline{a_1} = (1;\ 3;\ 1;\ 3)$, $\overline{a_2} = (2;\ 1;\ 1;\ 2)$ и $\overline{a_3} = (3;\ -1;\ 1;\ 1)$ линейно зависимыми.

Решение:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, получили ее общее решение (α; -2α; α).

Итак, условие (1) выполняется не только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, но и при λ_1, λ_2, λ_3 одновременно не равных нулю. Например, $\alpha = 1$, то $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\lambda_2 = 1$ и т.д. Следовательно, эти векторы — линейно зависимые.

Размерностью линейного пространства называется максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Линейное пространство называется *n-мерным*, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые (n + 1) векторов уже являются зависимыми.

Базисом n-мерного линейного пространства называют совокупность n линейно независимых векторов.

Каждый вектор $\overline{x}$ линейного пространства можно представить (и притом единственным способом) в виде линейной комбинации векторов базиса.

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n} \qquad (2)$$

где $\left(\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ ...,\ \overline{e_n}\right)$ — базис n –мерного пространства, x_1, x_2, … ,x_n — некоторые числа.

Равенство (2) называется *разложением вектора* $\overline{x}$ *по базису* $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, ... \overline{e_n}\right)$, а числа x_1, x_2, … ,x_n — *координатами вектора* $\overline{x}$ относительно этого базиса.

$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример:

В базисе $\left(\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}\right)$ заданы векторы $\overline{a_1} = (1;\ 1;\ 0)$, $\overline{a_2} = (1;\ -1;\ 1)$ и $\overline{a_3} = (-3;\ 5;\ -6)$.

Показать, что векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ образуют базис.

Решение:

Векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство:

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} = \overline{0}$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0,\\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0,\\ \qquad \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 8 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0,\\ \qquad \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0,\\ \qquad\qquad \lambda_3 = 0.\end{cases}$$

$$\lambda_3 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = 0.$$

Следовательно, векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ — линейно независимы и образуют базис.