Линейные операции над векторами.

К линейным операциям над векторами относятся действия сложения, вычитания и умножения вектора на число.

1) *Сложение* и *вычитание* векторов.

Чтобы получить вектор суммы $\vec{a}+\vec{b}$, можно воспользоваться «правилом треугольника» или «правилом параллелограмма».

По «правилу треугольника»: построим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$. Вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, является вектором суммы $\vec{a}+\vec{b}$.

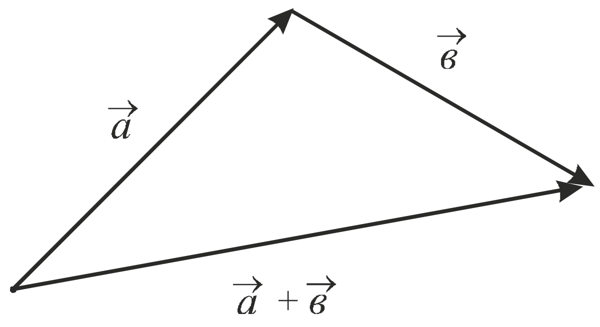

Рис. Построение вектора суммы $\vec{a}+\vec{b}$ *по «правилу треугольника»*

По «правилу параллелограмма»: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладываем от одной точки, строим на них параллелограмм. Тогда вектор, выходящий из того же начала и совпадающий по длине с диагональю параллелограмма, будет являться вектором суммы $\vec{a}+\vec{b}$.

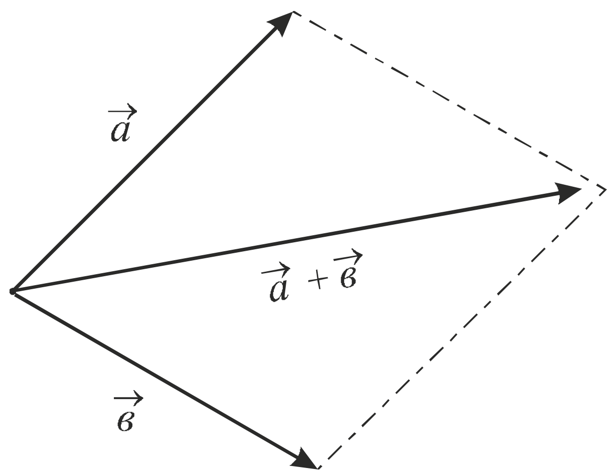

Рис. Построение вектора суммы $\vec{a}+\vec{b}$ *по «правилу параллелограмма»*

Под разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Для построения вектора разности $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладываем от одной точки. Тогда вектор, выходящий из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, будет являться вектором разности $\vec{a} - \vec{b}$.

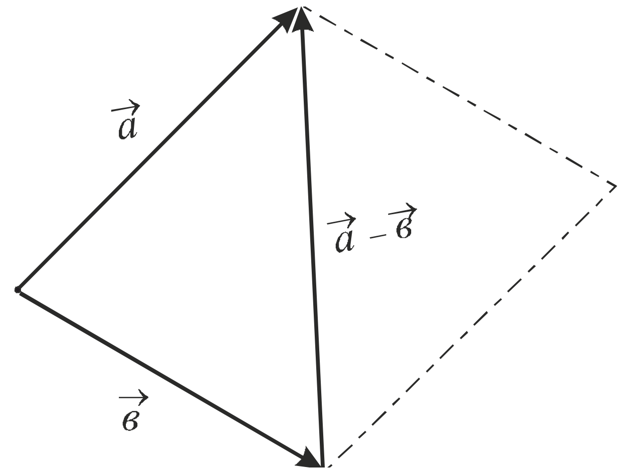

Рис. Построение вектора разности $\vec{a} - \vec{b}$

Таким образом, в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – разностью.

2) *Умножение вектора на число.*

Произведением вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $\left|\vec{c}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$ и то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Например, если дан вектор $\vec{a}$, то векторы $-2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{a}$ будут иметь вид:

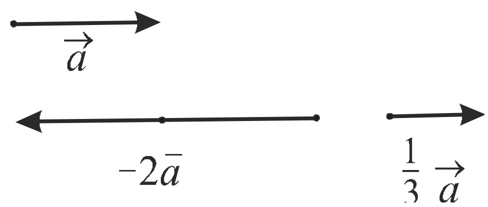

Рис. Построение векторов $-2\vec{a}$ *и* $\frac{1}{3}\vec{a}$

3. Координаты вектора.

Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz с общим началом O и одинаковой единицей масштаба называется прямоугольной системой координат в пространстве.

Положение любой точки в пространстве определяется тремя координатами — абсциссой x, ординатой y и аппликатой z и обозначается так: $M(x, y, z)$.

Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направление которых совпадает соответственно с направлением осей Ox, Oy и Oz, называются ортами координатных осей. Также орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называют координатным базисом.

Если вектор $\vec{a}$ отложить от начала координат, то координаты конца вектора будут являться координатами самого вектора $\vec{a}$. Обозначим координаты вектора так: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Вектор считается заданным, если известны его координаты.

Вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. (2.1)

Это есть разложение вектора $\vec{a}$ по базису.

Если известны координаты начала вектора $A(x_1; y_1; z_1)$ и координаты конца вектора $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формулам:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. (2.2)

Пример 2.1. Найти разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по базису, если $A(1; 5; 0)$ и $B(3; 3; -1)$.

Решение.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ по координатам его начала и конца, используя формулу (2.2):

$\overrightarrow{AB} = (3-1; 3-5; -1-0) = (2; -2; -1)$.

Тогда разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по базису будет иметь вид:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.