Прямая на плоскости

Метод координат предусматривает задание различных линий на плоскости соответствующими уравнениями.

Пусть у нас имеется некоторое уравнение относительно переменных x и y, а на плоскости Oxy имеется некоторая линия L.

Определение 1.1. *Уравнением линии L называется такое уравнение, которому удовлетворяют координаты каждой точки линии L и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии.* Переменные x и y уравнения линии называются *текущими координатами*.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть, принадлежащая плоскости Oxy, прямая L (рис. 5) образует с осью Ox угол $\varphi \neq 90^0$. Напомним, что угол наклона φ отсчитывается от оси Ox в направлении против движения часовой стрелки. Обозначим точку пересечения прямой L с осью Oy через $B(0;\, b)$. Выведем уравнение этой прямой.

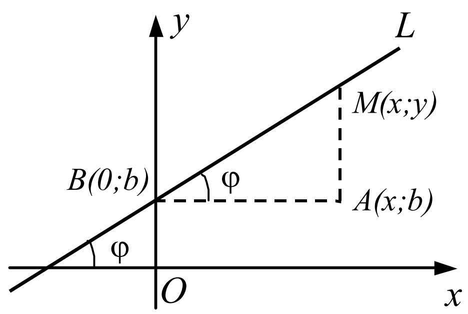

Рис. 5.

Пусть точка $M(x;\, y)$ лежит на прямой. Из прямоугольного треугольника BMA видно, что

$$tg\varphi = \frac{AM}{AB} = \frac{y-b}{x} \ . \qquad (1.5)$$

Тангенс угла наклона прямой обозначают через k и называют *угловым коэффициентом прямой:* $k = tg\varphi$. Выражение (1.5) принимает вид $k = \dfrac{y-b}{x}$, откуда следует

$$y = kx + b\,. \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой* (имеется в виду ордината точки B).

Пример 3. Написать уравнение прямой, образующей с осью Ox угол $\varphi = \pi/4$ (45^0) и отсекающей на оси Oy отрезок b=2.

Решение. Так как $k = tg(\pi/4) = 1$, то, согласно (1.6), уравнение этой прямой имеет вид $y = x + 2$.

Заметим, что описание линии соответствующим уравнением позволяет легко ответить на вопрос о принадлежности к этой линии той или иной точки плоскости. Например, точки A(-1; 1) и B(0; 2) лежат на прямой $y = x + 2$, так как их координаты x и y удовлетворяют уравнению $y = x + 2$, а точки C(-1; 3) и D(0; 1) не принадлежат этой прямой, так как их координаты не удовлетворяют уравнению $y = x + 2$.

Если в уравнении (1.6) положить $k = 0$, то получим

$$y = b \tag{1.7}$$

уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку B(0; b). При $b = 0$ из (1.7) получим уравнение оси Ox: $y = 0$.

Аналогично, уравнение

$$x = a \tag{1.8}$$

является уравнением прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку B(a; 0). При $a = 0$ получим уравнение оси Oy: $x = 0$.

Пример 4. Две прямые, одна из которых параллельна оси Ox, а другая параллельна оси Oy, пересекаются в точке M(1; 2). Написать их уравнения.

Решение. Согласно (1.7) и (1.8), прямые описываются уравнениями

$$y = 2 \quad \text{и} \quad x = 1.$$

Общее уравнение прямой.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.9}$$

где A, B, С – заданные числа, а x, y - текущие координаты, называется *общим уравнением прямой* на плоскости. Любую прямую на плоскости можно задать уравнением (1.9). Покажем это.

1. Если прямая не параллельна оси Oy, то она описывается уравнением (1.6): $y = kx + b$, которое, как видно, является частным случаем общего уравнения (1.9) при $A = k$, $B = -1$, $C = b$.

2. Если прямая параллельна оси Oy, то ее уравнение $x = a$ также представляет собой частный случай общего уравнения при $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку.

Пусть прямая имеет заданный угловой коэффициент k и проходит через точку $M(x_0; y_0)$. Уравнение этой прямой можно записать в виде (1.6):

$$y = kx + b,$$

где b - неизвестное пока число. Так как точка $M(x_0; y_0)$ лежит на этой прямой, то ее координаты удовлетворяют написанному уравнению, т. е.

$$y_0 = kx_0 + b. \qquad (1.10)$$

Вычитая (1.10) из (1.6) получим искомое уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1.11)$$

Пример 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ и образующей с осью Ox угол $\varphi = 60^0$.

Решение. Угловой коэффициент прямой $k = tg60^0 = \sqrt{3}$. Воспользовавшись уравнением (1.11), получим

$$y - 2 = \sqrt{3} \cdot (x - 1) \quad \text{или} \quad y = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} + 2.$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Пусть прямая L проходит через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Получим уравнение этой прямой. Предположим сначала, что $x_1 \neq x_2$, т. е. прямая не параллельна оси Oy. Тогда, учитывая, что точка $M_1(x_1; y_1)$ лежит на прямой L, воспользуемся уравнением (1.11). Получим

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (1.12)$$

где k - пока неизвестное нам число. Так как прямая L проходит и через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1.12):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)\text{, откуда находим } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставив найденное для k выражение в (1.12) получим искомое уравнение

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

или, в результате деления обеих частей на $y_2 - y_1$ (при $y_2 \neq y_1$),

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (1.13)$$

Если же $x_1 = x_2$, то прямая параллельна оси Oy и ее уравнение $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$, то прямая параллельна оси Ox и ее уравнение $y = y_1$.

Пример 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;2)$ и $B(3; -4)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (1.13). Получим

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-4-2}, \text{ откуда } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6}, \text{ или } 3x + y - 5 = 0.$$

Уравнение прямой в отрезках.

Получим уравнение прямой, положение которой задается величинами отрезков, отсекаемых ею на координатных осях. Пусть прямая проходит через точку $A(a;\ 0)$, лежащую на оси Ox (рис.6), и через точку $B(0;\ b)$, лежащую на оси Oy. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки (1.13), получим

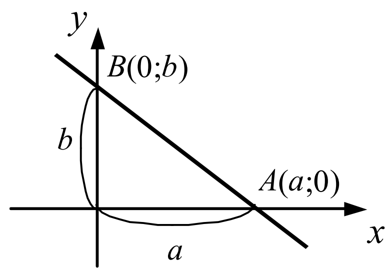

Рис. 6.

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \text{или} \quad -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b},$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) называется уравнением *прямой в отрезках.*