Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных методов решений систем линейных алгебраических уравнений является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.6}$$

Метод Гаусса состоит из двух этапов.

1. *Прямой ход.* С помощью элементарных преобразований систему (2.6) приводят к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = 1,\ldots, k$.

Например,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8, \\ \qquad x_2 + 7x_3 = -2, \\ \qquad\qquad x_3 = 5 \end{cases}$$ — система ступенчатого вида (треугольная);

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \qquad\quad = 8, \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$$ — система ступенчатого вида (трапецеидальная).

2. *Обратный ход.* Из ступенчатой системы (2.7) последовательно определяют неизвестные.

Рассмотрим *прямой ход* метода Гаусса, разбив его на шаги.

1 шаг: исключим с помощью 1-го уравнения x_1 из всех других уравнений, начиная со 2-го.

Пусть $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то изменяем порядок уравнений, выбрав первым такое уравнений, в котором коэффициент при x_1 не равен нулю).

Разделим 1-е уравнение на a_{11}, чтобы коэффициент при x_1 стал равным 1 (на практике этого, чаще всего, достигают, меняя местами уравнения или слагаемые в уравнениях):

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Умножим 1-е уравнение системы (2.8) на $(-a_{21})$, затем на $(-a_{31})$, …, $(-a_{m1})$ и прибавим, соответственно, ко 2-, 3-, …, m-му уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$$

где a'_{ij}, b'_i — новые значения коэффициентов и свободных членов, полученные после первого шага.

2 шаг: аналогично, с помощью 2-го уравнения исключим x_2 из всех уравнений, начиная с 3-го.

Пусть $a'_{22} \neq 0$. Разделим 2-ое уравнение на a'_{22}:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 + \ldots + \dfrac{a'_{2n}}{a'_{22}} x_n = \dfrac{b'_2}{a'_{22}}, \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Умножим 2-е уравнение системы (2.9) на $\left(-a_{32}^{/}\right)$, затем на $\left(-a_{42}^{/}\right)$, …, $\left(-a_{m2}^{/}\right)$ и прибавим соответственно к 3-, 4-, …, m-му уравнениям:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{/}x_2 + a_{13}^{/}x_3 + \ldots + a_{1n}^{/}x_n = b_1^{/}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{//}x_3 + \ldots + a_{2n}^{//}x_n = b_2^{//}, \\ \qquad\quad a_{33}^{//}x_3 + \ldots + a_{3n}^{//}x_n = b_3^{//}, \\ \qquad\quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \qquad\quad a_{m3}^{//}x_3 + \ldots + a_{mn}^{//}x_n = b_m^{//}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{//}$, $b_i^{//}$ — новые значения коэффициентов и свободных членов, полученные после второго шага.

Продолжаем этот процесс, пока не приведем систему к ступенчатому виду. Если при этом получаются уравнения вида 0 = 0, то их вычеркиваем. Если же появляется уравнение вида $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$, то, следовательно, система несовместна.

В результате прямого хода может быть получена система *треугольного* или *трапецеидального* ступенчатого вида.

Если получается система *треугольного* вида

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = l_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = l_2, \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = l_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad x_n = l_n, \end{cases} \tag{2.10}$$

в которой число уравнений n равно числу неизвестных n, то она имеет единственное решение, т.е. является совместной определенной. Это решение находится в результате обратного хода. Из последнего уравнения системы (2.10) определяется x_n. Подставляем его в предпоследнее уравнение и находим x_{n-1}. Затем определяем x_{n-2}, …, x_1.

П р и м е р 2.4. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 \qquad = 5. \end{cases}$$

Решение

Чтобы коэффициент при первой неизвестной в первом уравнении был равен 1, поменяем местами первые и третьи слагаемые во всех уравнениях системы:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 + 2x_1 = 8, \\ 4x_3 - x_2 + 2x_1 = 15, \\ \qquad - x_2 + 3x_1 = 5. \end{cases}$$

С помощью 1-го уравнения исключим x_3 из всех уравнений, начиная со 2-го. Умножим 1-е уравнение на (– 4) и прибавим ко 2-му уравнению:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 + 2x_1 = 8, \\ \quad -5x_2 - 6x_1 = -17, \\ \qquad - x_2 + 3x_1 = 5. \end{cases}$$

Чтобы коэффициент при второй неизвестной во втором уравнении был равен 1, умножим 3-е уравнение на (–1) и поменяем его местами со 2-м уравнением:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 + 2x_1 = 8, \\ \qquad x_2 - 3x_1 = -5, \\ \quad -5x_2 - 6x_1 = -17. \end{cases}$$

Умножим 2-е уравнение на 5 и прибавим к 3-ему:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 + 2x_1 = 8, \\ \qquad x_2 - 3x_1 = -5, \\ \qquad\quad -21x_1 = -42. \end{cases}$$

Разделим 3-е уравнение на (– 21):

$$\begin{cases} x_3 + x_2 + 2x_1 = 8, \\ \qquad x_2 - 3x_1 = -5, \\ \qquad\qquad x_1 = 2. \end{cases}$$

Получим систему треугольного вида.

Из последнего уравнения $x_1 = 2$. Подставим это значение во 2-е уравнение и найдем x_2:

$$x_2 - 3\cdot 2 = -5,$$

$$x_2 = 1.$$

Подставим найденные значения x_1 и x_2 в 1-е уравнение и найдем x_3:

$$x_3 + 1 + 2\cdot 2 = 8,$$

$$x_3 = 3.$$

Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Ответ: (2; 1; 3).

Если в результате прямого хода получается система *трапецеидального* вида

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1p}x_p + c_{1p+1}x_{p+1} + \ldots + c_{1n}x_n = l_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2p}x_p + c_{2p+1}x_{p+1} + \ldots + c_{2n}x_n = l_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad x_p + c_{pp+1}x_{p+1} + \ldots + c_{pn}x_n = l_p, \end{cases}$$

в которой число уравнений p меньше числа неизвестных n, то она имеет бесчисленное множество решений, т.е. является совместной неопределенной.

Чтобы найти это множество решений, приводим систему к треугольному виду. Для этого в левой части оставляем первые p неизвестных, а остальные $n-p$ неизвестных переносим в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1p}x_n = l_1 - c_{1p+1}x_{p+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2p}x_p = l_2 - c_{2p+1}x_{p+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad x_p = l_p - c_{pp+1}x_{p+1} - \ldots - c_{pn}x_n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Неизвестные x_1, x_2, …, x_n подразделяем на базисные (основные) и свободные (неосновные).

Число базисных неизвестных равно числу уравнений системы (2.11), т.е. p. А число свободных неизвестных равно $n-p$.

Неизвестные называются *базисными*, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля.

В системе (2.11) удобно в качестве базисных неизвестных выбрать те, которые стоят в левой части системы, т.е. x_1, x_2, …, x_p, т.к. определитель, составленный из коэффициентов при них, обязательно не равен 0. Тогда неизвестные, стоящие в правой части, т.е. $x_{p+1}, \ldots, x_n$, будут являться свободными.

Выполняем *обратный ход* метода Гаусса. Начиная с последнего уравнения, выражаем базисные неизвестные через свободные. Получаем *общее решение* системы. Если в нем придавать свободным неизвестным любые числовые значения, то получим бесчисленное множество *частных решений*. Если свободные неизвестные взять равными нулю, то получим *базисное решение.*

Замечания:

1. В качестве базисных неизвестных могут быть выбраны любые p неизвестных, определитель из коэффициентов при которых отличен от нуля. При этом для каждой группы базисных неизвестных получается «свое» общее решение, но все общие решения равносильны в том смысле, что они определяют равные бесконечные множества частных решений.
2. На практике удобнее работать не с системой (2.15), а с расширенной матрицей системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример 2.5. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim$$

Поменяем местами 1- и 2-ю строки:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim$$

Умножим 1-ю строку на (– 2), (– 3), (– 7) и прибавим, соответственно, ко 2-, 3-, 4-й строкам:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right)\sim$$

Умножим 2-ю строку на (– 1) и на (– 2) и прибавим, соответственно, к 3- и 4-ой строкам:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim$$

Вычеркиваем нулевые строки, соответствующие уравнению 0 = 0:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right).$$

Получим матрицу ступенчатого вида. Ей соответствует система ступенчатого вида:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad\qquad = 2, \\ \qquad x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Система является трапецеидальной. Приведем ее к треугольному виду, оставив неизвестные x_1, x_2 в левой части и перенеся x_3, x_4 в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ \qquad x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2 выберем в качестве базисных, т.к. определитель из коэффициентов при них не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Неизвестные x_3, x_4 — свободные. Выразим базисные неизвестные через свободные. Из последнего уравнения

$$x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4.$$

Подставим это выражение вместо x_2 в первое уравнение:

$x_1 + 3 + 13x_3 - 5x_4 = 2 + 5x_3,$

$x_1 = 2 + 5x_3 - 3 - 13x_3 + 5x_4,$

$x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4.$

Пусть свободные неизвестные $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, где $\alpha, \beta \in R$.

Тогда $x_1 = 5\beta - 8\alpha - 1$, $x_2 = 5\beta - 13\alpha - 3$.

Поэтому общее решение системы ($5\beta - 8\alpha - 1$, $5\beta - 13\alpha - 3$, α, β), где $\alpha, \beta \in R$.

Если положить $\alpha = \beta = 0$, то получим базисное решение системы (-1; -3; 0; 0).

Ответ: ($5\beta - 8\alpha - 1$, $5\beta - 13\alpha - 3$, α, β), где $\alpha, \beta \in R$.

Пример 2.6. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Данная система линейных уравнений является однородной, т.к. все свободные члены равны нулю.

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Умножим 1-ю строку на (– 3), (– 1), (– 3) и прибавим, соответственно, ко 2-, 3-, 4-й строкам:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Разделим 2-ю строку на (– 5), а 4-ую строку на 4:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Прибавим 2-ю строку к 3- и к 4-й строкам:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim$$

Вычеркиваем нулевые строки:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Получим матрицу ступенчатого вида. Ей соответствует система ступенчатого вида:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \qquad\quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Система является трапецеидальной. Приведем ее к треугольному виду, оставив неизвестные λ_1 и λ_2 в левой части, а неизвестную λ_3 перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -3\lambda_3, \\ \qquad\quad \lambda_2 = -2\lambda_3. \end{cases}$$

Пусть λ_1, λ_2 — базисные неизвестные, а λ_3 — свободная. Выразим λ_1, λ_2 через λ_3:

$\lambda_2 = -2\lambda_3$,

$\lambda_1 + 2(-2\lambda_3) = -3\lambda_3$,

$\lambda_1 = -3\lambda_3,+ 4\lambda_3$,

$\lambda_1 = \lambda_3$.

Пусть $\lambda_3 = \alpha$, где $\alpha \in R$.

Тогда общее решение системы $(\alpha, -2\alpha, \alpha)$, где $\alpha \in R$.

Ответ: $(\alpha, -2\alpha, \alpha)$, где $\alpha \in \mathrm{R}$.

П р и м е р 2.7. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Поменяем местами 1- и 2-ю строки:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

Умножим первую строку на (– 2), а затем на (– 4) и прибавим, соответственно, ко 2-, и 3-й строкам:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & -14 \\ 0 & 5 & 7 & -23 \end{array}\right) \sim$$

Умножим 2-ю строку на (– 1) и прибавим к 3-й:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Третьей строке полученной матрицы соответствует уравнение $0 = -9$, которое не имеет решений. Следовательно, система несовместна.

Ответ: система несовместна.