## Решение систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными по формулам Крамера

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы* (*главным определителем системы*):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обе части первого уравнения умножим на алгебраическое дополнение $A_{11}$ элемента $a_{11}$, обе части второго уравнения — на алгебраическое дополнение $A_{21}$ элемента $a_{21}$, обе части третьего уравнения — на алгебраическое дополнение $A_{31}$ элемента $a_{31}$ и сложим соответствующие части этих уравнений. Затем сгруппируем члены с $x_1$, с $x_2$ и с $x_3$ и вынесем их за скобки:

$$\begin{gathered}(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})\, x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})\, x_2 + \\ + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})\, x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

В равенстве (2.1) коэффициент при $x_1$ — это определитель системы $\Delta$, разложенный по элементам первого столбца по теореме разложения.

Коэффициенты при $x_2$ и при $x_3$ равны нулю по теореме аннулирования (сумма произведений элементов любого столбца (строки) на алгебраические дополнения элементов другого столбца (строки) равна нулю).

В правой части стоит определитель, полученный из определителя $\Delta$ путем замены первого столбца (коэффициенты при $x_1$) столбцом свободных членов. Обозначим его через $\Delta x_1$:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство (2.1) можно записать в виде $\Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1}$.

Если $\Delta \neq 0$, то

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}.$$

Аналогично можно найти $x_2$ и $x_3$:

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

где $\Delta_{x_2}$ получен из определителя $\Delta$ путем замены второго столбца (коэффициенты при $x_2$) столбцом свободных членов, а $\Delta_{x_3}$ — заменой третьего столбца (коэффициенты при $x_3$) столбцом свободных членов.

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, если определитель системы $\Delta \neq 0$, то решение системы можно найти по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \end{cases}$$

Эти формулы называются *формулами Крамера.*

***Теорема Крамера***. Если определитель системы $n$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \tag{2.2}$$

где $i = 1, 2, 3,\ldots, n$, $\Delta_{x_i}$ получается из определителя $\Delta$ путем замены $i$-го столбца определителя $\Delta$ столбцом свободных членов.

*Замечание.*

Теорема Крамера позволяет не только найти единственное решение системы, но и исследовать систему, не решая ее:

1) если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение;

2) если $\Delta = 0$ и все $\Delta_{x_i}$ ($i = 1, 2, 3,\ldots, n$) тоже равны нулю, то система совместна, и имеет бесконечное множество решений.

3) если $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_{x_i}$ ($i$ =1, 2, 3,…, $n$) не равен нулю, то система несовместна.

Пример 2.1. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

по формулам Крамера.

*Решение*

Найдем определитель системы по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-2)(-3) \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 1 - 2(-3) \cdot 1 - 2(-2)(-2) = 15.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Найдем это решение по формулам Крамера (2.2)

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1(-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \cdot 0 -$$

$$-0 \cdot 1 \cdot 1 - 2(-3) \cdot 8 - 1 \cdot (-2)(-2) = 30.$$

*Примечание.* В определителе $\Delta$ заменили первый столбец столбцом свободных членов.

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1(-2) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 8(-3) \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 1 - 0(-3) \cdot 1 - 2 \cdot 8(-2) = -45.$$

*Примечание.* В определителе $\Delta$ заменили второй столбец столбцом свободных членов.

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2(-2) \cdot 0 = 0.$$

*Примечание.* В определителе $\Delta$ заменили третий столбец столбцом свободных членов.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{30}{15} = 2, \\ x_2 = \dfrac{\Delta\ x_2}{\Delta} = \dfrac{-45}{15} = -3, \\ x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{0}{15} = 0. \end{cases}$$

Итак, (2; – 3; 0) — решение системы.

*Ответ:* (2; – 3; 0).