Действия над матрицами

1.2.1. Сложение матриц

Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности называется матрица $C = A + B$ той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 1.1. Вычислить сумму матриц $A + B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+2 \\ 3+0 & 5+7 \\ 1+3 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$ той же размерности, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, т.е. $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Пример 1.2. Вычислить $2A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение

$$2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Следствие: Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы. Например,

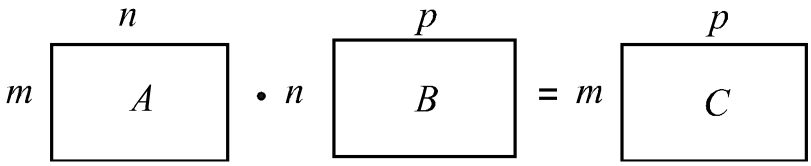
$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. Умножение матриц

Произведение матриц AB можно вычислить только, если *число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B*. В результате получим матрицу C, у которой столько же строк, как и у матрицы A, и столько же столбцов, как и у матрицы B. При этом каждый элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1,2, \ldots, p$.

Схема умножения матриц представлена на рис. 1.



$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$$

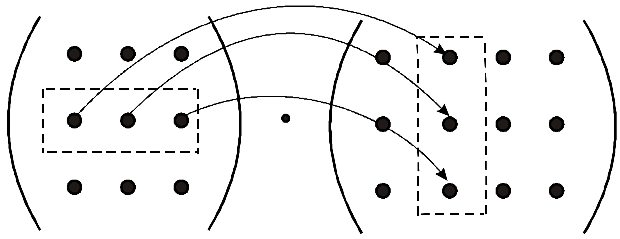


Рис. 1

П р и м е р 1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найдите $C = AB$.

Решение

Найдем размерность матрицы-произведения C:

$$(2 \times 2)(2 \times 2) = (2 \times 2).$$

Вычислим элементы матрицы C:

$c_{11} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 9 - 4 = 5$ (сумма произведений элементов 1-й строки матрицы A на соответствующие элементы 1-го столбца матрицы B);

$c_{12} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 12 - 10 = 2$ (сумма произведений элементов 1-й строки матрицы A на соответствующие элементы 2-го столбца матрицы B);

$c_{21} = 5 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 = 15 - 8 = 7$ (сумма произведений элементов 2-й строки матрицы A на соответствующие элементы 1-го столбца матрицы B);

$c_{22} = 5 \cdot 4 + (-4) \cdot 5 = 20 - 20 = 0$ (сумма произведений элементов 2-й строки матрицы A на соответствующие элементы 2-го столбца матрицы B).

Тогда $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.4. Свойства операций над матрицами

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A + (-A) = O$;
5. $A \cdot 1 = A$;
6. $A \cdot 0 = O$;
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$;
9. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
10. $A(BC) = (AB)C$;
11. $A(B + C) = AB + AC$;
12. $(A + B)C = AC + BC$;
13. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
14. $AE = EA = A$,

где A, B, C, E, O — матрицы, α, β — числа.

Переместительный закон умножения для матриц, в общем случае, не выполняется, т.е. $AB \neq BA$.

Пример 1.4. Выполните указанные действия:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

Решение

1) $(2\times 3)\,(3\times 1) = (2\times 1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 1\cdot 4 & 3\cdot 5 \\ -1\cdot 1 & 0\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4+15 \\ -1+0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2) $(3\times 3)\,(3\times 2) = (3\times 2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 3\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 5 - 3\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 2 - 4\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 5 - 4\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 2 - 5\cdot 1 + 3\cdot 1 & 2\cdot 5 - 5\cdot 2 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2-3+2 & 5-6+6 \\ 6-4+1 & 15-8+3 \\ 4-5+3 & 10-10+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-6 & -2+8 \\ 3-12 & -6+16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5+18 & 10-24 \\ -9+30 & 18-40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}.$$