С точностью до числового множителя ротор поля скоростей $\bar{V}$ представляет собой угловую скорость вращения твердого тела. С этим связано само название «ротор» (лат. «вращатель»).

Замечание. Из определения (71.13) ротора вытекает, что направление ротора — это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке S.

Так что связь между ротором и циркуляцией аналогична связи между градиентом и производной по направлению (см. п. 70.3).

§ 72. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

72.1. Векторные дифференциальные операции первого порядка

Основными дифференциальными операциями (действиями) над скалярным полем U и векторным полем $\bar{a}$ являются $\operatorname{grad} U$, $\operatorname{div} \bar{a}$, $\operatorname{rot} \bar{a}$. Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются *векторными операциями первого порядка* (в них участвуют только первые производные).

Эти операции удобно записывать с помощью так называемого *оператора Гамильтона*

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.}$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇ (читается «набла»); он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями. Символическое «умножение» вектора ∇ на скаляр U или вектор $\bar{a}$ производится по обычным правилам векторной алгебры, а «умножение» символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на величины U, P, Q, R понимают как взятие соответствующей частной производной от этих величин.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \operatorname{grad} U.$

2. $\nabla \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot (P\cdot\bar{i} + Q\cdot\bar{j} + R\cdot\bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{a}.$

3. $\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \bar{a}.$

Оператор Гамильтона применяется для записи и других операций и для вывода различных формул в теории поля. При действиях с ним надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования.

В частности, производная по направлению (70.2) может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e} \cdot \nabla) \cdot U,$$

где $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

72.2. Векторные дифференциальные операции второго порядка

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получаются *дифференциальные операции второго порядка.* Нетрудно убедиться, что имеется лишь пять дифференциальных операций второго порядка: $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}$.

(Понятно, что операция $\operatorname{div}\operatorname{div}\bar{a}$, например, не имеет смысла: $\operatorname{div}\bar{a}$ — скаляр, говорить о дивергенции скаляра, т. е. о $\operatorname{div}\operatorname{div}\bar{a}$, бессмысленно.)

Запишем явные выражения для дифференциальных операций второго порядка, используя оператор Гамильтона. Заметим при этом, что оператор действует только на множитель, расположенный непосредственно за оператором.

1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla(\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla)U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Правая часть этого равенства называется *оператором Лапласа* скалярной функции U и обозначается ΔU. Таким образом,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (72.1)$$

Дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ играет важную роль в различных разделах математической физики. Решениями уравнения Лапласа являются так называемые *гармонические функции.*

Замечание. К равенству (72.1) можно прийти, введя в рассмотрение скалярный оператор дельта:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(который тоже называют оператором Лапласа).

2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla)U = 0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю (нуль-вектор). Это означает, что поле градиента есть поле безвихревое.

3. $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} =$

$$= \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\bar{a})\cdot\bar{k} =$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\Big)\bar{i} + \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\Big)\bar{j} +$$

$$+ \Big(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\Big)\bar{k}.$$

4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}) = 0$, так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю. Это означает, что поле вихря — соленоидальное.

5. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\times(\nabla\times\bar{a}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\bar{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} - \Delta\bar{a}$, так как двойное векторное произведение обладает свойством

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

Здесь $\Delta\bar{a} = \Delta P\,\bar{i} + \Delta Q\,\bar{j} + \Delta R\,\bar{k}$ — векторная величина, полученная в результате применения оператора Лапласа к вектору $\bar{a}$.

§ 73. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

73.1. Соленоидальное поле

Напомним, что векторное поле $\bar{a}$ называется *соленоидальным*, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т. е. $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

Примерами соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела (см. пример 71.4); магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток, и другие.

Приведем некоторые *свойства* соленоидального поля.

1. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это свойство непосредственно вытекает из формулы (71.8). Таким образом, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

2. Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т. е. если $\operatorname{div}\bar{a} = 0$, то существует такое поле $\bar{b}$, что $\bar{a} = \operatorname{rot}\bar{b}$. Вектор $\bar{b}$ называется ***векторным потенциалом*** поля $\bar{a}$.

Любое из свойств 1–2 можно было бы взять в качестве определения соленоидального поля.

Доказывать свойство 2 не будем. Отметим лишь, что обратное утверждение — поле ротора векторного поля есть соленоидальное — нами доказано (выше мы показали, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = 0$).

3. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое *интенсивностью* трубки).

❑ Рассмотрим векторную трубку между двумя ее произвольными сечениями S_1 и S_2; боковую поверхность трубки обозначим через S (см. рис. 280). Поток вектора через замкнутую поверхность, состоящую из S_1, S_2 и S, равен нулю. Следовательно,

$$\iint\limits_S a_n\,ds + \iint\limits_{S_1} a_n\,ds + \iint\limits_{S_2} a_n\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{a}\,dv = 0,$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль.

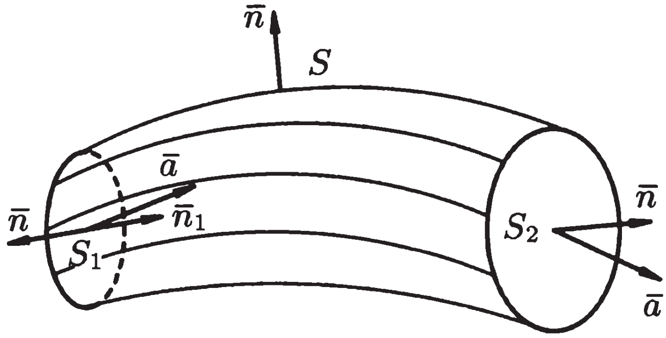

Рис. 280

Так как на боковой поверхности векторной трубки нормаль $\bar{n}$ перпендикулярна к векторам поля, то $\iint\limits_S a_n\,ds = 0$ и, следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} a_n\,ds = -\iint\limits_{S_2} a_n\,ds.$$

Переменив направление нормали на площадке S_1, т. е. взяв внутреннюю нормаль $\bar{n}_1$, получим:

$$\iint\limits_{S_1} a_{n_1}\,ds = \iint\limits_{S_2} a_n\,ds. \qquad \blacksquare$$

В поле скоростей текущей жидкости полученный результат означает, что количество жидкости, втекающей в трубку за единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из нее.

73.2. Потенциальное поле

Векторное поле $\bar{a}$ называется *потенциальным* (или *безвихревым*, или *градиентным*), если во всех точках поля ротор равен нулю, т. е.

$\operatorname{rot} \bar{a} = 0$. Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда (и другие).

Приведем основные свойства потенциального поля.

Свойство 1. Циркуляция потенциального поля $\bar{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю.

☐ Это непосредственно вытекает из формулы (71.14). Следовательно, $C = \oint\limits_L a_\tau dl = 0$. ■

В частности, для силового потенциального поля это означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю; в поле скоростей текущей жидкости равенство $C = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек, т. е. нет водоворотов.

Свойство 2. В потенциальном поле $\bar{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой.

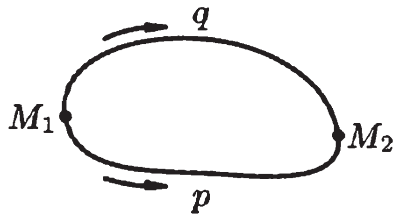

Рис. 281

☐ Это свойство вытекает из свойства 1. Действительно, взяв в поле две точки M_1 и M_2, соединим их двумя кривыми M_1pM_2 и M_1qM_2 так, чтобы контур $M_1pM_2qM_1$ лежал внутри поля (см. рис. 281). Тогда, в силу свойства 1, имеем

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Учитывая свойства криволинейного интеграла, получаем:

$$\oint\limits_{M_1pM_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{M_2qM_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{M_1pM_2} - \int\limits_{M_1qM_2} = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_{M_1pM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{M_1qM_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$ ■

Свойство 3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x;y;z)$, т. е. если $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$, то существует функция $U(x;y;z)$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} U$.

❑ Из равенства $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ вытекает, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, т. е. выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x;y;z)$ (следствие 56.1). Эту функцию называют потенциалом векторного поля $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$; $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

Отсюда: $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Следовательно,

$$\bar{a} = P \cdot \bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k} = \operatorname{grad} U,$$

т. е. вектор поля $\bar{a}$ является градиентом скалярного поля. ■

Замечание. Из равенства $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$ следует обратное утверждение — поле градиента скалярной функции $U = U(x;y;z)$ является потенциальным.

Из равенства $\bar{a} = \operatorname{grad} \overline{U}$ следует, что потенциальное поле определяется заданием ***одной*** скалярной функции $U = U(x;y;z)$ — его потенциала. Потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$U(x;y;z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(\chi;y_0;z_0)\,d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)\,d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;\zeta)\,d\zeta + c, \quad (73.1)$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ — координаты фиксированной точки, $(x;y;z)$ — координаты произвольной точки. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого (из-за того, что $\operatorname{grad}(U + a) = \operatorname{grad} U$).

Произвольное же векторное поле требует задания ***трех*** скалярных функций ($P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ — проекции вектора поля на оси координат).

Замечание. Определение потенциального поля может быть дано иначе — векторное поле $\bar{a}$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля, т. е. $\bar{a} = \operatorname{grad} U$. (Иногда пишут $\bar{a} = -\operatorname{grad} U$; знак «минус» пишут для удобства, обычно векторные линии направлены в сторону убывания U: поток жидкости направлен туда, где давление меньше; теплота перемещается от более нагретого места к менее нагретому и т. д.)

Пример 73.1. Установить потенциальность поля

$$\bar{a}(M) = (yz - 2x)\bar{i} + (xz - 2y)\bar{j} + xy\bar{k}$$

и найти его потенциал.

◔ Решение: Имеем:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz-2x & xz-2y & xy \end{vmatrix} = (x-x)\bar{i} - (y-y)\bar{j} + (z-z)\bar{k} = 0.$$

Следовательно, поле вектора $\bar{a}$ потенциальное.

Найдем потенциал U по формуле (73.1), выбирая в качестве фиксированной точки начало координат, т. е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Так как $P(x; y_0; z_0) = -2x$, $Q(x; y; z_0) = -2y$, $R(x; y; z) = xy$, то

$$U(x; y; z) = \int_0^x (-2\chi)\,d\chi + \int_0^y (-2\xi)\,d\xi + \int_0^z xy\,d\zeta + c = -x^2 - y^2 + xyz + c. \ \bullet$$

73.3. Гармоническое поле

Векторное поле $\bar{a}$ называется *гармоническим* (или *лапласовым*), если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т. е. если $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$ и $\operatorname{div}\bar{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\bar{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\bar{a} = \operatorname{grad} U$, где $U = U(x; y; z)$ — потенциал поля.

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то

$$\operatorname{div}\bar{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0,$$

или, что то же самое,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

т. е. потенциальная функция U гармонического поля $\bar{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа. Такая функция называется, как уже упоминали, гармонической.