Лекция №4

Дифференциальные уравнения движения точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1) Определение движения точки координатным способом.

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси *Oxyz* (рис.20). Проектируя обе части равенства $ma = \sum F_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т.д., получим ***дифференциальные уравнения криволинейного движения точки*** в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

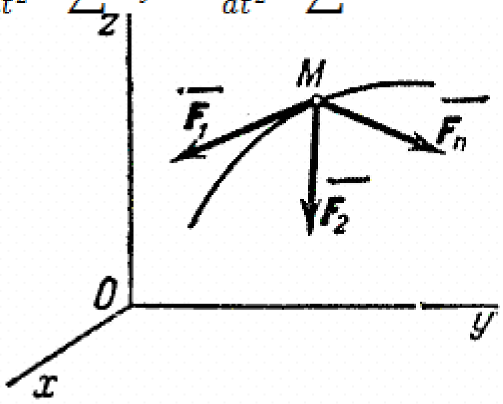

Рис.20

Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время *t*, координаты точки *x, y, z* и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.

Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т.е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях *Oxyz* начальные условия задаются в виде: при t=0

$$\begin{cases} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ v_x = v_{x_0}, \quad v_y = v_{y_0}, \quad v_z = v_{z_0} \end{cases}.$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты *x, y, z* движущейся точки, как функции времени *t*, т.е. найдем закон движения точки.

Пример 19. Найти закон движения материальной точки массы *m*, движущейся вдоль оси *x* под действием постоянной по модулю силы *F* (рис. 20.1) при начальных условиях: $x = x_0$, $v = v_0$ при t=0.

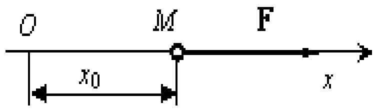

Рис.20.1

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x: $m\dot{v} = F$. Интегрируя это уравнение, находим: $v = \left(\frac{F}{m}\right) + C_1$. Постоянная C_1определяется из начального условия для скорости и равна $C_1 = v_0$. Окончательно

$v = v_0 + (F/m)t.$

Далее, учитывая, что v = dx/dt, приходим к дифференциальному уравнению: $\dot{x} = v_0 + (F/m)t$, интегрируя которое получаем

$x = v_0t + \left(\frac{F}{m}\right)t^2 + C_2.$

Постоянную C_2 определяем из начального условия для координаты точки. Она равна $C_2 = x_0$. Следовательно, закон движения точки имеет вид

$x = x_0 + v_0t + \left(\frac{F}{2m}\right)t^2.$

Пример 20. Груз веса P (рис.20.2) начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $F = kt$. Найти закон движения груза.

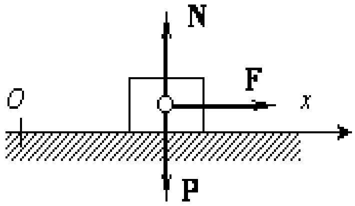

Рис.20.2

Решение. Выберем начало отсчета системы координат O в начальном положении груза и направим ось x в сторону движения (рис. 20.2). Тогда начальные условия имеют вид: $x(t = 0) = 0$, v$(t = 0) = 0$. На груз действуют силы F, P и сила реакции плоскости N. Проекции этих сил на ось x имеют значения $F_x = F = kt$, $P_x = 0$, $N_x = 0$, поэтому соответствующее уравнение движения можно записать так: $\left(\frac{P}{g}\right)\dot{v} = kt$. Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении и затем интегрируя, получим: v = $gkt^2/2P + C_1$. Подставляя начальные данные ($v(0) = 0$), находим, что $C_1 = 0$, и получаем закон изменения скорости $v = \dot{x} = gkt^2/2P$.

Последнее выражение, в свою очередь, является дифференциальным уравнением, интегрируя которое найдем закон движения материальной точки: $x = \left(\frac{g}{6P}\right)kt^3 + C_2$. Входящую сюда постоянную определяем из второго начального условия $x(0) = 0$. Легко убедиться, что C_2=0. Окончательно

$X = \frac{g}{6P}kt^3.$

Пример 21. На груз, находящийся в покое на горизонтальной гладкой плоскости (см. рис. 20.2) на расстоянии a от начала координат, начинает действовать в положительном направлении оси x сила $F = k^2(P/g)x$, где P – вес груза. Найти закон движения груза.

Решение. Уравнение движения рассматриваемого груза (материальной точки) в проекции на ось x

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = k^2\frac{p}{g}x. \qquad (1)$$

Начальные условия уравнения (1) имеют вид: $x(t = 0) = a$, $v(t = 0) = 0$.

Входящую в уравнение (1) производную по времени от скорости представим так

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) и сокращая на (P/g), получим

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} = k^2x.$$

Разделяя переменные в последнем уравнении, находим, что $dv^2 = 2k^2xdx$. Интегрируя последнее, имеем: $v^2 = k^2x^2 + C_1$. Используя начальные условия $v^2(0) = k^2x^2(0) + C_1$, получаем $C_1 = -k^2a^2$, и, следовательно,

$$v^2 = k^2(x^2 - a^2), \qquad v = \pm k\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (2)$$

Поскольку сила действует на груз в положительном направлении оси x, то ясно, что в том же направлении он должен и двигаться. Поэтому в решении (2) следует выбрать знак "плюс". Заменяя дальше во втором выражении (2) v на dx/dt, получаем дифференциальное уравнение для определения закона движения груза. Откуда, разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = kdt.$$

Интегрируя последнее, находим: $\operatorname{arch} x/a = kt + C_2$. После нахождения постоянной C_2 окончательно получаем

$\operatorname{arch} x/a = kt$ или $x = a\operatorname{ch}kt = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$.

Пример 22. Шар M массы m (рис.20.3) падает без начальной скорости под действием силы тяжести. При падении шар испытывает сопротивление $R = \mu v$, где μ – постоянный коэффициент сопротивления. Найти закон движения шара.

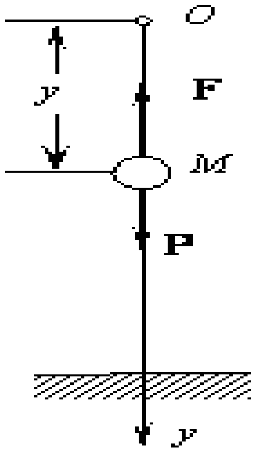

Рис.20.3

Решение. Введем систему координат с началом в точке местоположения шара при $t = 0$, направив ось y вертикально вниз (рис. 20.3). Дифференциальное уравнение движения шара в проекции на ось y имеет тогда вид

$$m\dot{v} = mg - \mu v. \qquad (1)$$

Начальные условия для шара записываются так: $y(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$.

Разделяя переменные в уравнении (1)

$$dv\left(\frac{g}{n} - v\right)^{-1} = ndt$$

и интегрируя, находим: $\ln\left(\frac{g}{n} - v\right) = -nt + C$, где $n = \mu/m$. Или после нахождения постоянной

$$\ln\left(\frac{\frac{g}{n} - v}{\frac{g}{n}}\right) = -nt \text{ или } v = \frac{g}{n}(1 - e^{-nt}). \qquad (2)$$

Отсюда следует, что предельная скорость, т.е. скорость при $t \to \infty$, равна $\lim_{t\to\infty} v = g/n$.

Чтобы найти закон движения, заменим в уравнении (2) v на dy/dt. Тогда, интегрируя полученное уравнение с учетом начального условия, окончательно находим

$$y = \frac{g}{n}t - \frac{g}{n^2}(1 - e^{-nt}).$$

Пример 23. Изучим движение тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, рассматривая его как материальную точку массы m (рис.21). При этом сопротивлением воздуха пренебрежём, а поле тяжести будем считать однородным (P=const), полагая, что дальность полёта и высота траектории малы по сравнению с радиусом Земли.

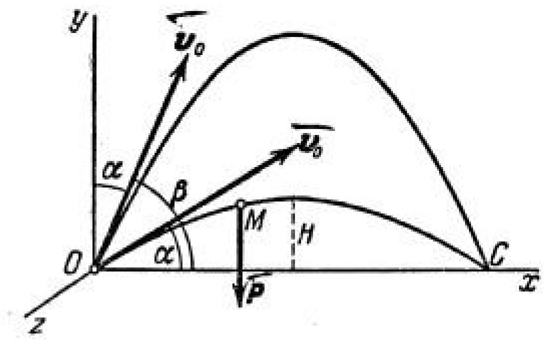

Рис.21

Решение. Поместим начало координат O в начальном положении точки. Направим ось Оy вертикально вверх; горизонтальную ось Ox расположим в плоскости, проходящей через Oy и вектор v_0, а ось Oz проведём перпендикулярно первым двум осям (рис.21). Тогда угол между вектором v_0 и осью Ox будет равен α.

Изобразим движущуюся точку M где-нибудь на траектории. На точку действует одна только сила тяжести $\vec{P}$, проекции которой на оси координат равны: $P_x=0$, $P_y=-P=-mg$, $P_z=0$.

Подставляя эти величины в дифференциальные уравнения и замечая, что d^2x/dt $=dv_x/dt$ и т.д. мы после сокращения на m получим:

$$\frac{dv_x}{dt}=0,\qquad \frac{dv_y}{dt}=0,\qquad \frac{dv_z}{dt}=0.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим:

$V_x=C_1$, $V_y=-dt+C_2$, $V_z=C_3$

Начальные условия в нашей задаче имеют вид:

при t=0:

$$x=0,\quad v_x=v_0cosa$$
$$y=0,\quad v_y=v_0sina$$
$$z=0,\quad v_z=0$$

Удовлетворяя начальным условиям, будем иметь:

$$C_1=v_0cos\alpha,\quad C_2=v_0sin\alpha,\quad C_3=0.$$

Подставляя эти значения C_1, C_2 и C_3 в найденное выше решение и заменяя v_x, v_y, v_z на $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$ придём к уравнениям:

$$\frac{dx}{dt}=v_0cos\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt}=v_0sin\alpha\cdot gt,$$
$$\frac{dz}{dt}=0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$x=v_0tcos\alpha+C_4,$$
$$y=v_0tsin\alpha\cdot\frac{gt^2}{2}+C_5,$$
$$z=0$$

Подстановка начальных данных даёт C_4=C_5=C_6=0, и мы окончательно находим уравнения движения точки M в виде:

$$x=v_0tcos\alpha,\ \ y=v_0tsin\alpha\cdot\frac{gt^2}{2},\ \ z=0 \qquad (1)$$

Из последнего уравнения следует, что движение происходит в плоскости *Oxy*.

Имея уравнение движения точки, можно методами кинематики определить все характеристики данного движения.

1. Траектория точки. Исключая из первых двух уравнений (1) время t, получим уравнение траектории точки:

$$y = xtg\alpha \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Это - уравнение параболы с осью, параллельной оси *Oy*. Таким образом, ***брошенная под углом к горизонту тяжёлая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (Галилей).***

2. Горизонтальная дальность. Определим горизонтальную дальность, т.е. измеренное вдоль оси *Ox* расстояние *OC*=*X*. Полагая в равенстве (2) *y*=0, найдём точки пересечения траектории с осью *Ox*. Из уравнения:

$$x\left(tg\alpha \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}\right) = 0$$

получаем $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2v_0^2 cos^2\alpha tg\alpha}{g}$

Первое решение дает точку *O*, второе точку *C*. Следовательно, $X=X_2$ и окончательно

$$X = \frac{v_0^2}{g} sin2\alpha. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что такая же горизонтальная дальность *X* будет получена при угле β, для которого $2\beta = 180^0 - 2\alpha$, т.е. если угол $\beta = 90^0 - \alpha$. Следовательно, при данной начальной скорости v_0 в одну и ту же точку С можно попасть двумя траекториями: настильной ($\alpha < 45^0$) и навесной ($\beta = 90^0 - \alpha > 45^0$).

При заданной начальной скорости V_0 наибольшая горизонтальная дальность в безвоздушном пространстве получается, когда $sin2\alpha = 1$, т.е. при угле $\alpha = 45^0$.

3. Высота траектории. Если положить в уравнении (2) $x = \frac{1}{2}X = \frac{v_0^2}{g} sin\alpha cos\alpha$, то найдется высота траектории *H*:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} sin^2\alpha. \qquad (4)$$

4. Время полета. Из первого уравнения системы (1) следует, что полное время полета *T* определяется равенством $X = v_0 T cos\alpha$. Заменяя здесь *X* его значением, получим

$$T = \frac{2v_0}{g} sin\alpha.$$

При угле наибольшей дальности $\alpha = 45^0$ все найденные величины равны:

$$x^* = \frac{v_0^2}{g}, \quad H^* = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{4}x^*, \quad T^* = \frac{v_0}{g}\sqrt{2}.$$

Полученные результаты практически вполне приложимы для ориентировочного определения характеристик полета снарядов (ракет), имеющих дальности порядка 200…600 км,так как при этих дальностях (и при $\alpha \approx 45^0$) снаряд основную часть своего пути проходит в стратосфере, где сопротивлением воздуха можно пренебречь. При меньших дальностях на результат будет сильно влиять сопротивление воздуха, а при дальностях свыше 600 *км* силу тяжести уже нельзя считать постоянной.

Пример 24. Из пушки, установленной на высоте h, произвели выстрел под углом α к горизонту (рис. 22). Ядро вылетело из ствола орудия со скоростью u. Определим уравнения движения ядра.

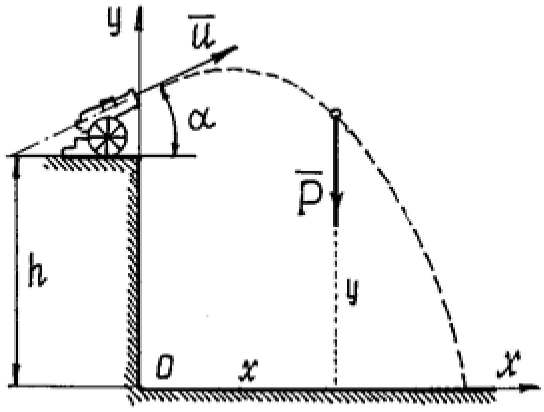

Рис.22

Решение. Чтобы правильно составить дифференциальные уравнения движения, надо решать подобные задачи по определённой схеме.

а) Назначить систему координат (количество осей, их направление и начало координат). Удачно выбранные оси упрощают решение.

б) Показать точку в промежуточном положении. При этом надо проследить за тем, чтобы координаты такого положения обязательно были положительными (рис.22).

в) Показать силы, действующие на точку в этом промежуточном положении (силы инерции не показывать!).

В этом примере – это только сила $\vec{P}$, вес ядра. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

г) Составить дифференциальные уравнения по формулам: $\frac{P}{g}\ddot{x} = 0, \quad \frac{P}{g}\ddot{y} = -P$. Отсюда получим два уравнения: $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = -g$.

д) Решить дифференциальные уравнения.

Полученные здесь уравнения – линейные уравнения второго порядка, в правой части – постоянные. Решение этих уравнений элементарно.

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + D_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1 t + D_2 \end{cases}$$

Осталось найти постоянные интегрирования. Подставляем начальные условия (при $t = 0$ $x = 0$, $y = h$, $\dot{x} = v_x = ucos\alpha, \dot{y} = v_y = usin\alpha$) в эти четыре уравнения: $ucos\alpha = C_1,\ usin\alpha = D_1,\ 0 = C_2,\ h = D_2$.

Подставляем в уравнения значения постоянных и записываем уравнения движения точки в окончательном виде

$$\begin{cases} x = utcos\alpha, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + utsin\alpha + h \end{cases}$$

Имея эти уравнения, как известно из раздела кинематики, можно определить и траекторию движения ядра, и скорость, и ускорение, и положение ядра в любой момент времени.

Как видно из этого примера, схема решения задач довольно проста. Сложности могут возникнуть только при решении дифференциальных уравнений, которые могут оказаться непростыми.

Пример 25. Материальная точка массой m движется прямолинейно (рис.22.1) под действием силы $F=F_0\cos\omega t$ (F_0 и ω — постоянные величины). Пренебрегая весом, определить скорость и положение точки в момент времени $t_1=\pi/2\omega$, если она в начальный момент находилась в начале координат и ее скорость была равна v_0.

Рис.22.1

Решение. Точка движется прямолинейно, поэтому достаточно одной оси координат. Направим ось Ox вдоль траектории точки. Изобразим точку в промежуточном положении на ее траектории. Приложим к точке силу F (другие силы отсутствуют).

Составим уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = F_0 cos\omega t.$$

Скорость точки

$$v = \dot{x} = \frac{1}{m}\int F_0 cos\omega t dt = \frac{F_0}{m\omega} sin\omega t + C_1.$$

Подставим начальные условия $t = 0$; $v = v_0$. Так как sin0 = 0, получим $C_1 = v_0$.

Закон движения точки:

$$x = \int v(t)dt = \int \left(\frac{F_0}{m\omega} sin\omega t + v_0\right) dt = -\frac{F_0}{m\omega^2} cos\omega t + v_0 t + C_2.$$

Подставим начальные условия $t = 0$; $x = 0$. Ввиду того, что cos0 = 1, получим $C_2 = F_0/(m\omega^2)$.

Находим для момента времени $t_1=\pi/(2\omega)$

$$v(t_1) = \frac{F_0}{m\omega} sin\omega\frac{\pi}{2\omega} + v_0 = \frac{F_0}{m\omega} sin\omega\frac{\pi}{2} + v_0 = \frac{F_0}{m\omega} + v_0;$$

$$x(t_1) = \frac{F_0}{m\omega^2} cos\omega\frac{\pi}{2\omega} + v_0\frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2} = v_0\frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Пример 26. Груз весом Р движется вниз по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α=30° с горизонтом. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость f=0,16. В начальный момент груз находился в положении M_o на расстоянии a=9 м от начала координат и имел скорость v_0=30 м/с. Определить уравнение движения груза в заданной системе координат (рис. 22.2).

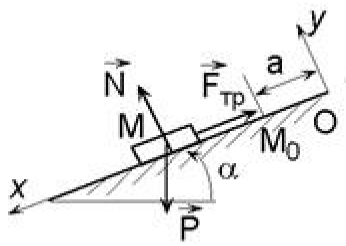

Рис.22.2

Решение. Пусть тело в произвольный момент времени t занимает положение M на наклонной плоскости. Освободим тело от связи (шероховатой наклонной плоскости), заменив ее действие нормальной составляющей реакции N и силой трения $F_{тр}$. Тогда тело будет двигаться под действием системы трех сил (P, N, $F_{тр}$).

Примем тело за материальную точку. Проектируя основное уравнение динамики точки

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{s=1}^{n} \vec{F_s}$$

на оси декартовых координат Ox и Oy (ось Ox совпадает с направлением движения точки), получим два дифференциальных уравнения:

$$m\ddot{x} = \sum F_{sx} = Psin\alpha - F_{тр}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{sy} = N - Pcos\alpha. \qquad (2)$$

Здесь m – масса точки; $\ddot{x}, \ddot{y}$ – проекции ускорения точки на соответствующие оси.

Так как тело движется прямолинейно вдоль оси Ox, то проекция ускорения на ось Oy равна нулю, следовательно, уравнение (2) примет вид $N = Pcos\alpha.$

Сила трения по закону Кулона равна $F_{тр} = f \cdot N = f \cdot Pcos\alpha$. С учетом этого выражения дифференциальное уравнение (1) примет следующий вид:

$$m\ddot{x} = Psin\alpha - f \cdot Pcos\alpha.$$

После замены $P=mg$, где g – ускорение свободного падения тела, и очевидных преобразований получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} = g \cdot (sin\alpha - fcos\alpha).$$

Для понижения порядка уравнения произведем замену $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv_x}{dt} = g \cdot (sin\alpha - fcos\alpha).$$

Разделив переменные, проинтегрируем дифференциальное уравнение с учетом начальных условий (при t=0, v_x=v_0):

$$\int_{v_0}^{v_x} dv_x = \int_0^t g \cdot (sin\alpha - f cos\alpha) dt,$$

$$v_x = v_0 + g \cdot (sin\alpha - f cos\alpha) \cdot t. \qquad (3)$$

Произведем замену для понижения порядка уравнения $v_x = \frac{dx}{dt}$ и, разделив переменные, проинтегрируем дифференциальное уравнение второй раз с учетом начальных условий (при t=0 x=x_0=a):

$$\int_a^x dx = \int_0^t [v_0 + g \cdot (sin\alpha - f cos\alpha)t] dt,$$

$$x = a + v_0 \cdot t + g \cdot (sin\alpha - f cos\alpha) \cdot \frac{t^2}{2}. \qquad (4)$$

Подставив в соотношение (4) значения заданных величин, получим окончательно следующее уравнение движения груза:

$$x = 9 + 9{,}81 \cdot (sin30° - 0{,}16cos30°) \cdot \frac{t^2}{2} = 9 + 30t + 1{,}77t^2.$$

2) Определение движения точки естественным способом.

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченные какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения, на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем не просто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 23).

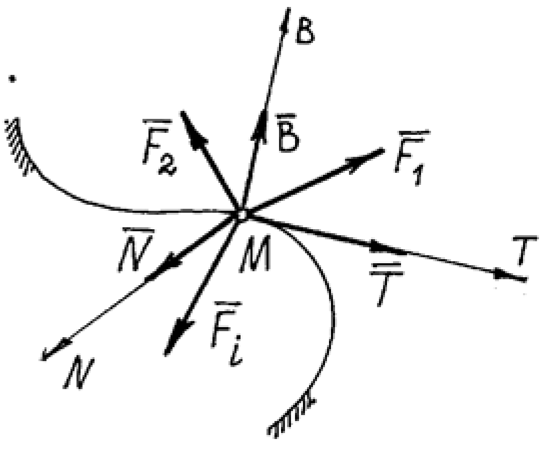

Рис.23

На точку M кроме заданных активных сил $\vec{F_i}$, действует реакция линии. Показываем составляющие реакции $\vec{R}$ по естественным осям $\vec{N}, \vec{T}, \vec{B}$.

Составим основное уравнение динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F_i} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ и спроектируем его на естественные оси

$$\begin{cases} ma_n = \sum F_{in} + N, \\ ma_\tau = \sum F_{i\tau} + T, \\ ma_B = \sum F_{ib} + B. \end{cases}$$

Так как $a_n = \frac{v^2}{\rho}, a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}, a_B = 0$, то получим дифференциальные уравнения движения, такие

$$\begin{cases} m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{in} + N, \\ m\ddot{s} = \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 = \sum F_{ib} + B \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь сила $\vec{T}$ - сила трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то $T = 0$ и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную – координату s:

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}.$$

Решив это уравнение, получим закон движения точки s=s(t), а значит, при необходимости, и скорость и ускорение. Первое и третье уравнения (5) позволят найти реакции $\vec{N}$ и $\vec{B}$.

.5.

Пример 27. Лыжник спускается по цилиндрической поверхности радиуса r. Определим его движение, пренебрегая сопротивлениями движению (рис. 24).

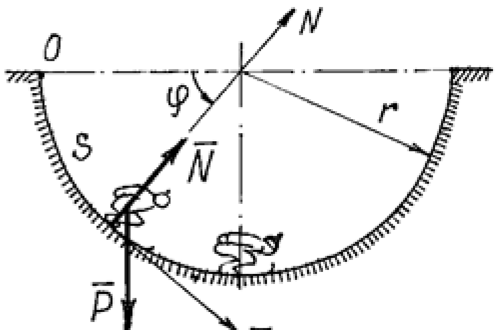

Рис.24

Решение. Схема решения задачи та же, что и при координатном способе (пример 15). Отличие лишь в выборе осей. Здесь оси N и T движутся вместе с лыжником. Так как траектория – плоская линия, то ось B, направленную по бинормали, показывать не нужно (проекции на ось B действующих на лыжника сил будут равны нулю).

Дифференциальные уравнения по (5) получим такие

$$\frac{P}{g}\ddot{s} = P\cos\varphi; \quad \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = N - P\sin\varphi. \qquad (6)$$

Первое уравнение получилось нелинейным: $\ddot{s} = g\cos\varphi$. Так как $s = r\varphi$, то его можно переписать так: $\ddot{\varphi} - \frac{g}{r}\cos\varphi = 0$. Такое уравнение можно один раз проинтегрировать. Запишем $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$. Тогда в дифференциальном уравнении переменные разделятся: $d\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\cos\varphi\cdot d\varphi$. Интегрирование дает решение $\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{r}\sin\varphi + C_1$. Так как при $t =$ 0: $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = \omega_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и $\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{r}\sin\varphi}$, а $\dot{s} = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr\sin\varphi}$.

К сожалению, в элементарных функциях второй интеграл найти невозможно. Но и полученное решение позволяет сделать некоторые выводы. Можно найти скорость лыжника в любом положении как функцию угла φ. Так в нижнем положении, при $\varphi = \frac{\pi}{2}, v = \dot{s} = \sqrt{2gr}$. А из второго уравнения (6) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ можно определить давление: $N = P + \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g}\frac{2gr}{r} = 3P$. То есть давление на лыжника в нижнем положении равно его трехкратному весу.

Пример 28. Научно-исследовательская подводная лодка шарообразной формы и массы $m = 1.5\cdot10^5$ *кг* начинает погружаться с выключенными двигателями, имея горизонтальную скорость $v_{x0} = 30$ *м/с* и отрицательную плавучесть $P_1 = 0{,}01mg$, где $P_1 = mg + Q$ – векторная сумма архимедовой выталкивающей силы Q и силы тяжести mg, действующих на лодку (рис. 24.1). Сила сопротивления воды $R = -\alpha v$, $\alpha = 3\cdot10^4$ *кг/с*. Определить уравнения движения лодки и ее траекторию.

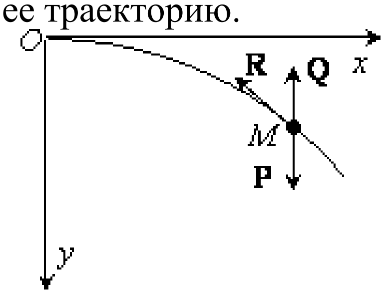

Рис.24.1

Решение. Начало координат выберем в начальном положении лодки, ось Ox направим горизонтально, а ось Oy – вертикально вниз (см. рис. 24.1). На лодку действуют три силы: $P=mg$ – вес лодки, Q – архимедова выталкивающая сила, причем mg>Q, и сила сопротивления R. Лодку примем за материальную точку M. Тогда второй закон Ньютона запишется так: $m\ddot{r} = -P_1 - \alpha v$. В проекциях на оси Ox и Oy он будет иметь вид: $m\ddot{x} = 0 - \alpha v_x, m\ddot{y} = P_1 - \alpha v_y$. Перепишем эти уравнения в форме системы уравнений первого порядка

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_x, \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_y + \frac{P_1}{m}.$$

Интегрируя их методом разделения переменных, получаем

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{\alpha}{m} dt, \qquad \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{\left(v_y - \frac{P_1}{\alpha}\right)} = -\int_0^t \frac{\alpha}{m} dt.$$

После интегрирования и подстановки численных значений параметров и начальных данных находим

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-\frac{\alpha}{m}t} = 30e^{-0,2t} \text{ м/с}.$$

$$v_y(t) = \frac{P_1}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) = 0{,}49(1 - e^{-0,2t}) \text{ м/с}.$$

Закон движения находим из решения дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 30e^{-0,2t}, \qquad \dot{y} = 0{,}49(1 - e^{-0,2t}).$$

Он описывается соотношениями

$$x(t) = x_0 + \int_0^t 30\, e^{-0,2t} dt = 150(1 - e^{-0,2t}) \text{ м},$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t 0{,}49(1 - e^{-0,2t}) dt = 0{,}49[t - 5(1 - e^{-0,2t})] \text{ м}.$$

В заключение найдем траекторию *y* (*x*). Для этого из первого уравнения выразим время *t* через координату *x*

$$T = -5ln\left(1 - \frac{x}{150}\right).$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим

$$y(x) = 0{,}49\left[-5ln\left(1 - \frac{x}{150}\right) - \frac{x}{30}\right].$$

Пример 29. Точка, имеющая массу *m*, движется из состояния покоя по окружности радиуса *R* с постоянным касательным ускорением a_τ (рис.25). Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние $s_1 = R\sqrt{2}$.

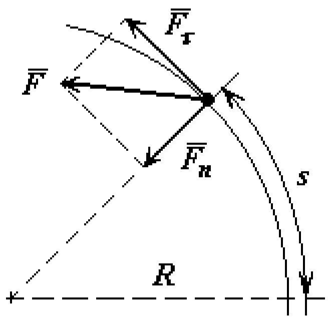

Рис.25

Решение. Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

$$F_\tau = m \cdot a_\tau;\ F_n = m \cdot \frac{v^2}{R};\ F_B = 0;$$

Так как $a_\tau = const$, то $v_\tau = a_\tau \cdot t, \quad s = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}$

$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \quad F_n = m \cdot \frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R};$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}},$$

$s_1 = \frac{a_\tau \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}$; следовательно $t_1^2 = \frac{2R\sqrt{2}}{a_\tau}$;

$\frac{a_\tau^2 \cdot t_1^4}{R} = a_\tau^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_\tau^2 \cdot R^2} = 8;$

следовательно

$F(t_1) = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_\tau.$

$F(t_1) = 3m \cdot a_\tau.$

Пример 30. Груз массы *m* подвешен на нити длиной *l*. В начальный момент времени груз отклонили в сторону (нить натянута) и сообщили ему горизонтальную скорость, перпендикулярную нити (рис.25.1). Найти величину скорости груза и натяжение нити, если нить составляет с вертикалью постоянный угол α.

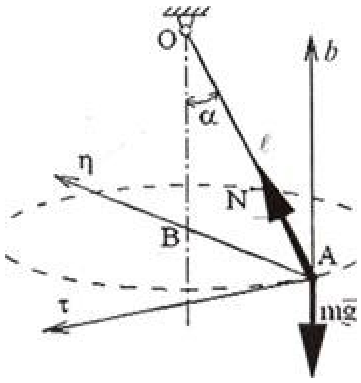

Рис.25.1

Решение. Будем считать груз материальной точкой. Приложим к грузу силу тяжести *mg* и натяжение нити *N*.

Как следует из условия задачи, при движении груза нить описывает коническую поверхность, траекторией груза является окружность с центром в точке B и радиусом *AB*=*l*sinα. Если известна траектория точки, воспользуемся естественной системой координат *(AτNb)* и уравнениями движения в естественной форме

$$\begin{cases} m\dot{v} = 0; \\ m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = N\sin\alpha; \\ 0 = N\cos\alpha - mg. \end{cases}$$

Из первой формулы следует, что скорость движения груза будет постоянной по величине, т.е. будет сохранить начальное значение. Из третьей формулы можем выразить натяжение нити

$N = \frac{mg}{\cos\alpha}.$

Подставив полученное выражение силы натяжения во вторую формулу, получим

$m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha.$

$$v = \sqrt{\frac{lg\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

Относительное движение материальной точки

В предыдущем параграфе показано было как определяется движение точки относительно неподвижной системы отсчета, абсолютное движение. Нередко приходится исследовать движение материальной точки относительно системы, которая сама движется и довольно сложным образом.

Точка M (рис.26) под действием некоторых сил $\vec{F_i}$ совершает сложное движение. Абсолютное определяется координатами x, y, z, относительное – координатами x_1, y_1, z_1.

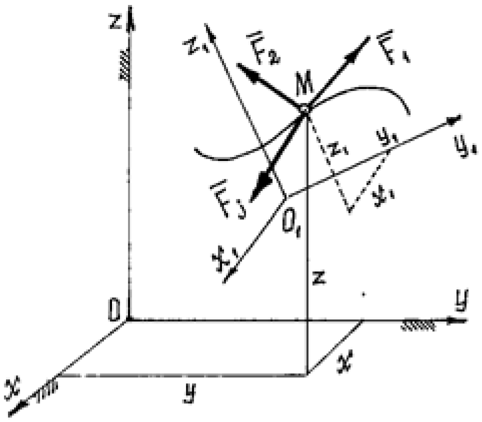

Рис.26

Составим основное уравнение динамики для точки $m\vec{a} = \sum\vec{F_i}$, где абсолютное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$. Поэтому уравнение будет таким $m(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \sum\vec{F_i}$ или $m\vec{a}_r = \sum\vec{F_i} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

.6.

Но $(-m\vec{a}_e) = \vec{F}_e^{ин}$ - переносная сила инерции, $(-m\vec{a}_c) = \vec{F}_c^{ин}$ - кориолисова сила инерции. Поэтому основное уравнение динамики для относительного движения запишем так

$$m\vec{a}_r = \sum\vec{F_i} + \vec{F}_e^{ин} + \vec{F}_c^{ин}. \qquad (7)$$

Спроектировав это векторное равенство на подвижные оси x_1, y_1, z_1, имея в виду, что проекции вектора ускорения на оси – есть вторые производные от соответствующих координат по времени, получим дифференциальные уравнения относительного движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \sum X_i + \vec{X}_e^{ин} + \vec{X}_c^{ин}, \\ m\ddot{y}_1 = \sum Y_i + \vec{Y}_e^{ин} + \vec{Y}_c^{ин}, \\ m\ddot{z}_1 = \sum Z_i + \vec{Z}_e^{ин} + \vec{Z}_c^{ин}. \end{cases} \qquad (8)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями абсолютного движения, замечаем, что ***относительное движение***

материальной точки определяется такими же методами, что и абсолютное, надо лишь кроме обычных сил учесть переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное, т.е. подвижная система инерциальная, то ускорение $\vec{a}_e = 0$ и $\vec{a}_c = 0$. Значит $\vec{F}_e^{\text{ин}} = 0,\ \vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$ и дифференциальное уравнение (8) будет точно совпадать с дифференциальным уравнением абсолютного движения. Следовательно, движение точки во всех инерциальных системах описывается аналогичными законами (отличаются только постоянными интегрирования, зависящими от начальных условий).

Поэтому невозможно установить, наблюдая за движением точки, движется система поступательно, равномерно и прямолинейно или находится в покое. Этот вывод впервые был сделан Г.Галилеем и называется его именем – ***принцип относительности Галилея*.**

Физические величины и физические законы, не изменяющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, называют ***инвариантными*** (не изменяющимися) к преобразованиям Галилея.