ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

На практике часто встречаются функции двух и более независимых переменных. Например, объем конуса $V=\pi r^2 h$ зависит от двух переменных радиуса основания r и высоты h. Объем прямоугольного параллелепипеда $V=xyz$ зависит от трех переменных x, y, z и т.д.

Рассмотрим подробнее функцию двух независимых переменных.

Определение. Если каждой паре значений переменных (x, y), принадлежащих некоторому множеству *Д,* по определенному закону f поставлено в соответствие одно значение переменной z, принадлежащее множеству E, то говорят, что задана *функция двух независимых переменных* $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные (аргументы), z — зависимая переменная (функция), множество *Д* — область определения функции.

Частные производные функции двух независимых переменных

Чтобы найти частную производную первого порядка функции $z = f(x, y)$ по переменной x, надо принять $y=const$, и функция станет функцией одной переменной x.

Аналогично, чтобы найти частную производную первого порядка функции $z = f(x,y)$ по переменной y, надо принять $x = const$, и функция станет функцией одной переменной y.

Поэтому для нахождения частных производных применяем те же формулы и правила дифференцирования, что и для функции одной переменной.

В свою очередь частные производные первого порядка можно так же дифференцировать по переменной x и по переменной y. Получим частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$ (рис).

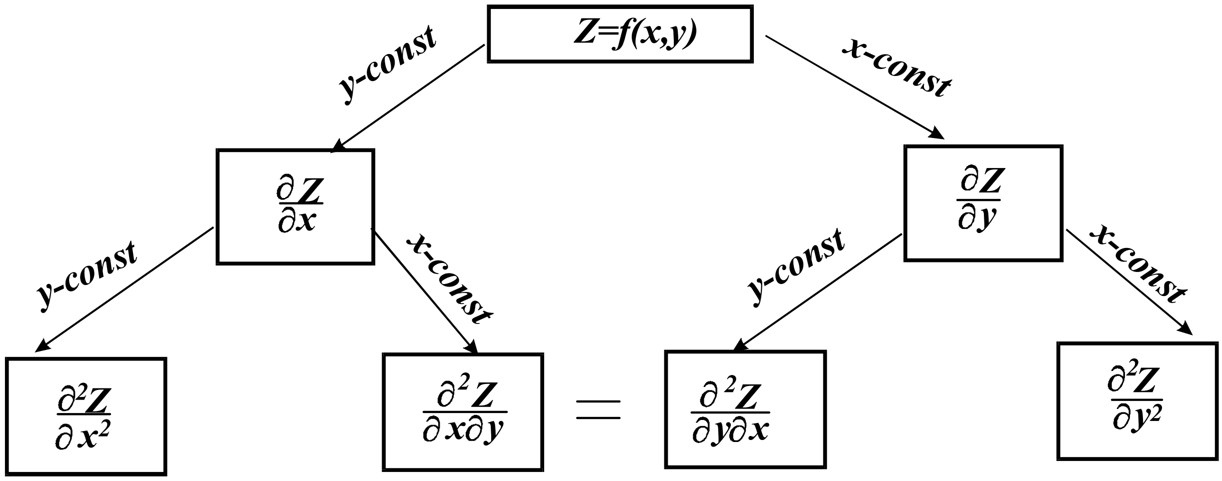

Рис. Схема нахождения частных производных функции двух независимых переменных

Частной производной функции $z = f(x;\ y)$ в точке М$(x;\ y)$ по переменной x называют конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

где $\Delta_x(z) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Частную производную по переменному x обозначают z_x' или $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Таким образом, $z_x' = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Из этого определения вытекает, что для отыскания z_x' следует *применять известные ранее правила дифференцирования функции одной переменной при условии, что вторая переменная y остается постоянной.*

Аналогично определяется, обозначается и находится частная производная от функции $z = f(x, y)$ по переменной y: z_y' или $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Производные z_x' и z_y' называют частными производными первого порядка.

Частные производные *второго порядка* определяются как частные производные от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{или} \quad z''_{xx} = (z'_x)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{или} \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{или} \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y.$$

При исследовании функции $z = f(x, y)$ на экстремум (минимум и максимум) следует:

а) найти частные производные z_x', z_y';

б) найти *критические точки*, т.е. точки, в которых z_x', z_y', не существуют или равны нулю;

в) проверить наличие экстремума в каждой из полученных критических точек. Это можно сделать либо по определению экстремума, либо с помощью достаточного признака.

Достаточный признак экстремума функции $z = f(x, y)$.

Пусть в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ частные производные первого порядка существуют и равны нулю. Пусть $A = z''_{xx}\big|_{M_0}$, $B = z''_{xy}\big|_{M_0}$, $C = z''_{yy}\big|_{M_0}$ и $\Delta = AC - B^2$.

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ есть экстремум: максимум (при $A < 0$) или минимум (при $A > 0$);
2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0; y_0)$ нет экстремума.
3) в случае $\Delta = 0$, в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.