П р и м е р 1. Вычислить определённые интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

а) $\int_1^2 x^3 dx$; *б)* $\int_1^4 \sqrt{x} dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; *г)* $\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25}$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислим данные определенные интегралы:

а) $\int_1^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$;

б) $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_1^4 = \frac{2}{3}4\sqrt{4} - \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left.\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$;

г) $\int_0^5 \frac{dx}{x^2+25} = \left.\frac{1}{5} arctg \frac{x}{5}\right|_0^5 = \frac{1}{5}(arctg 1 - arctg\, 0) = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{20}$.

П р и м е р 2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_{-1}^2 (4x^3 - 1)dx$; *б)* $\int_1^4 (x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$; *в)* $\int_0^{\pi} (e^x - \frac{1}{2}\cos x)dx$.

Решение.

Применяя свойства определённого интеграла и формулу Ньютона-Лейбница, вычислим интегралы:

а) $\int_{-1}^2 (4x^3 - 1)dx = 4\int_{-1}^2 x^3 dx - \int_{-1}^2 dx = 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^2 - \left.x\right|_{-1}^2 = \left.x^4\right|_{-1}^2 - \left.x\right|_{-1}^2 =$

$= 4\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^2 - \left.x\right|_{-1}^2 = \left.x^4\right|_{-1}^2 - \left.x\right|_{-1}^2 =$

$= \left(2^4 - (-1)^4\right) - \left(2 - (-1)\right) = (16 - 1) - 3 = 12$;

б) $\int_1^4 \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 x^2 dx - 2\int_1^4 x dx + \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx =$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4-2\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4+\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^4=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4-x^2\Big|_1^4+\sqrt{x}\Big|_1^4=$$

$$=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{1}{3}\right)-\left(4^2-1^2\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right)=21-15+1=7\ ;$$

в) $\int\limits_0^{\pi}(e^x-\frac{1}{2}\cos x)dx=\int\limits_0^{\pi}e^x dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos xdx=e^x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi}=$

$$=\left(e^{\pi}-e^0\right)-\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin 0\right)=e^{\pi}-1\ .$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^3 xdx$;

б) $\int\limits_{-1}^2\frac{dx}{x^2}$

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x}$

г) $\int\limits_0^3(2x-5)dx$

д) $\int\limits_{-2}^1\left(\frac{3}{2}x+4x^3\right)dx$

е) $\int\limits_1^9\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx$

Ответы:

1) *а)* 4; *б)* $-1{,}5$; *в)* 1; *г)* -6 ; *д)* $-17{,}25$; *е)* $\frac{4}{9}$.