Определенный интеграл. Его свойства. Формула Ньютона-Лейбница

Краткие теоретические сведения:

1. Интегральная сумма и определенный интеграл.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Выполним следующие действия:

1) С помощью точек $x_0=a$, x_1, x_2, …, $x_n=b$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ разобьем отрезок $[a;b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$.

2) В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, i = 1, 2, …, n выберем произвольную точку $c_i\in[x_{i-1};x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3) Умножим найденное значение $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

4) Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i .$$

Сумма называется *интегральной суммой* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda=\max\Delta x_i$ (i = 1, 2, …, n).

5) Найдем предел интегральной суммы S_n, когда $n\to\infty$ так, что $\lambda\to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то он и называется *определенным интегралом* от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, отрезок $[a;b]$ — *областью* (*отрезком*) *интегрирования.*

Функция $y=f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Теорема: Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

2. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)\geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу — осью *Ox*. сбоку — прямыми $x=a$, и $x=b$, называется *криволинейной трапецией*.

Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади этой криволинейной трапеции.

3. Формула Ньютона-Лейбница.

Для вычисления определённого интеграла применяется формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ нужно:

1) найти первообразную $F(x)$ (при $C=0$),

2) в полученное выражение подставить вместо x пределы интегрирования, сначала верхний, а затем нижний и из первого результата вычесть второй.

4. Основные свойства определенного интеграла.

1. Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрировании, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt\,.$$

2. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разделён точкой c на два отрезка $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

6. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждой из этих функции:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$