Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Простейшие приемы интегрирования

Краткие теоретические сведения:

Интегральное исчисление – раздел математического анализа, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования.

Основными понятиями интегрального исчисления являются понятия первообразной, неопределённого интеграла, определённого интеграла. Они были введены независимо друг от друга английским математиком И. Ньютоном и немецким математиком Г. Лейбницем.

Знак интеграла $\int$ был опубликован в статье Г. Лейбница в 1686 г., термин «интеграл» впервые в печати употребил швейцарский учёный Якоб Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление». Однако современная терминология была создана только в конце XVIII века.

1. Понятие неопределенного интеграла.

Ране решалась задача: по данной функции $f(x)$ найти её производную или дифференциал. Рассмотрим обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x)=f(x)$ или дифференциал.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ для любого *x* из области определения $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=x^2$ первообразной является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$. Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, где С — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество $F(x)+C$ первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных $F(x)+C$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Например, $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$.

Достаточным условием существования неопределенного интеграла на некотором промежутке является непрерывность функции на этом промежутке.

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

2. Свойства неопределённого интеграла.

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)^{/}=f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u=u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

3. Таблица основных неопределённых интегралов.

1. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,(n\neq-1)$	1.1. $\int du=u+C$
	1.2. $\int\frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{u}+C$
	1.3. $\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=2\sqrt{u}+C$
2. $\int\frac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+C$	
3. $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C$	3.1. $\int a^{ku}du=\frac{1}{k}\frac{a^{ku}}{\ln a}+C$
4. $\int e^u du=e^u+C$	4.1. $\int e^{ku}du=\frac{1}{k}e^{ku}+C$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$	5.1. $\int \sin ku\,du = -\frac{1}{k}\cos ku + C$
6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$	6.1. $\int \cos ku\,du = \frac{1}{k}\sin ku + C$
7. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\,u + C$	
8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u + C$	
9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$	
10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$	
11. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$	
12. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{u}{a} + C$	

4. Основные методы интегрирования

1) Метод непосредственного интегрирования: данный интеграл путём простейших тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределённого интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2) Метод замены переменной (метод подстановки): заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой–либо из основных формул интегрирования.

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)du \end{bmatrix} = \int f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)du = \int F(u)du$$

После нахождения интеграла через переменную *u* следует перейти к переменной *x*.

3) Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Определим дифференциал произведения этих функций:

$d(uv) = udv + vdu$,

откуда

$udv = d(uv) - vdu$.

Проинтегрировав обе части равенства, получим формулу интегрирования по частям:

$\int udv = uv - \int vdu$.

При применении этой формулы надо:

1) подынтегральное выражение разбить на две части *u* и dv, при этом за *u* обычно принимается x^n, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$,

2) по *u* дифференцированием найти *du*,

3) по dv интегрированием найти v, причем постоянную интегрирования опустить,

4) подставить в формулу, прийти к более простому интегралу.