П р и м е р 1. Найти производную второго порядка для функции $y = 3x^4 + x - 5$.

Решение.

Найдем производную первого порядка:

$$y' = \left(3x^4 + x - 5\right)' = 3\left(x^4\right)' + (x)' - (5)' = 12x^3 + 1.$$

Теперь найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(12x^3 + 1\right)' = 12\left(x^3\right)' + (1)' = 36x^2.$$

П р и м е р 2. Найти производную третьего порядка для функции $y = \ln(x^5)$.

Решение.

Найдем производную первого порядка:

$$y' = \left[\ln(x^5)\right]' = \frac{1}{x^5}\left(x^5\right)' = \frac{1}{x^5}5x^4 = \frac{5\cancel{x^4}}{\cancel{x^5}} = \frac{5}{x}.$$

Найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{5}{x}\right)' = 5\left(x^{-1}\right)' = -5x^{-2}.$$

Найдем производную третьего порядка:

$$y''' = \left(y''\right)' = \left(-5x^{-2}\right)' = -5\left(x^{-2}\right)' = 10x^{-3} = \frac{10}{x^3}.$$

П р и м е р 3. Найти дифференциал функции:

а) $y = e^{\sin x}$;

б) $z = \ln(4t - 3)$.

Решение.

Для того чтобы найти дифференциал данной функции, достаточно найти ее производную и полученное выражение умножить на дифференциал независимой переменной.

а) Дифференциал функции найдем по формуле:

$$dy = f'(x)dx.$$

Найдем y':

$$y' = (e^{\sin x})' = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$$

Тогда

$$dy = e^{\sin x}\cos x dx.$$

б) Дифференциал функции найдем по формуле:

$$dz = f'(t)dt$$

Найдем z':

$$z' = \left(\ln(4t - 3)\right)' = \frac{1}{4t - 3}(4t - 3)' = \frac{4}{4t - 3}.$$

Тогда

$$dz = \frac{4dt}{4t-3}.$$

Пример 4. Исследовать на монотонность и экстремумы функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

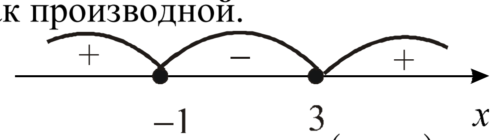
Решение.

1. Находим область определения функции: $D(y) = R$.

2. Находим производную функции $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

3. Находим критические точки: $y' = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 3$.

4. Отмечаем критические точки на числовой прямой. В полученных интервалах расставим знак производной.



5. Функция возрастает на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$, убывает на интервале $(1; 3)$.

6. Согласно достаточному условию экстремума $x = 1$ — точка максимума, а $x = 3$ — точка минимума данной функции.

7. Находим экстремумы: $y(1) = 3$ — максимум функции; $y(3) = -1$ — минимум функции.

Пример 5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции $y = x^3 + \frac{1}{4}x^4$.

Решение.

1. Находим область определения функции: $D(y) = R$.

2. Находим производную функции: $y' = 3x^2 + x^3$.

3. Находим вторую производную: $y'' = \left(3x^2 + x^3\right)' = 6x + 3x^2$

4. Находим критические точки второго рода:

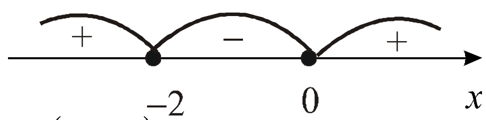
$$6x + 3x^2 = 0,$$

$$3x(2 + x) = 0,$$

$$3x = 0 \text{ или } 2 + x = 0,$$

$$x_1 = 0 \quad \text{или } x_2 = -2.$$

5. Отмечаем область определения и критические точки второго рода на числовой прямой. В полученных интервалах расставим знак второй производной.



6. График выпуклый на $(-2; 0)$, график вогнутый на $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$; $x = -2$, $x = 0$ — абсциссы точек перегиба.

7. Находим ординаты точек перегиба: $y(-2)=(-2)^3+\frac{1}{4}(-2)^4=-4$, $y(0)=0$. Таким образом, $(-2;-4)$, $(0;0)$ — точки перегиба.

П р и м е р 6. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение.

1. Область определения функции: $D(y)=R$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения.

3. Исследуем функцию на четность:

$$y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x)^2-3(-x)+5=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+5.$$

Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, то есть это функция общего вида. Ее график не будет обладать симметрией относительно начала координат и оси Oy.

4. Найдем первую производную:

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5\right)'=x^2-2x-3.$$

Найдем критические точки функции. Приравняем производную к нулю и решим уравнение:

$$x^2-2x-3=0;$$
$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16;$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1},$$
$$x_1=-1,\ x_2=3.$$

Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критические точки. Эти точки разбивают область определения на три интервала: $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$, $(3;+\infty)$. В полученных интервалах расставляем знак производной y':

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$ и убывает на интервале $(-1;3)$.

$x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума.

Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 5 = 6\frac{2}{3},$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = -4.$$

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(x^2 - 2x - 3\right)'' = 2x - 2.$$

Найдем критические точки второго рода. Приравняем производную y'' к нулю и решим уравнение:

$$2x - 2 = 0,$$
$$x = 1.$$

Точек, в которых вторая производная y'' не существует нет.

На числовую ось нанесем область определения функции и критическую точку второго рода. Область определения разбивается на два интервала: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. В полученных интервалах расставим знак второй производной y'':

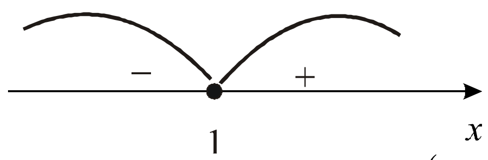


График функции выпуклый на интервале $(-\infty; 1)$ и вогнутый на интервале $(1; +\infty)$.

При переходе через критическую точку второго рода $x = 1$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x = 1$ — абсцисса точки перегиба.

Вычислим значение функции в точке $x = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = 1\frac{1}{3}.$$

$y = 1\frac{1}{3}$ — ордината точки перегиба.

Итак, $\left(1; 1\frac{1}{3}\right)$ — точка перегиба.

6. Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции $x = 0$. Тогда $y = 5$. Значит график функции пересекает ось Oy в точке $(0; 5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить кубическое уравнение

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0.$$

Оно имеет не более трех решений. Следовательно, график функции пересекает ось Ox не более чем в трех точках.

7. По результатам исследования построим график функции.

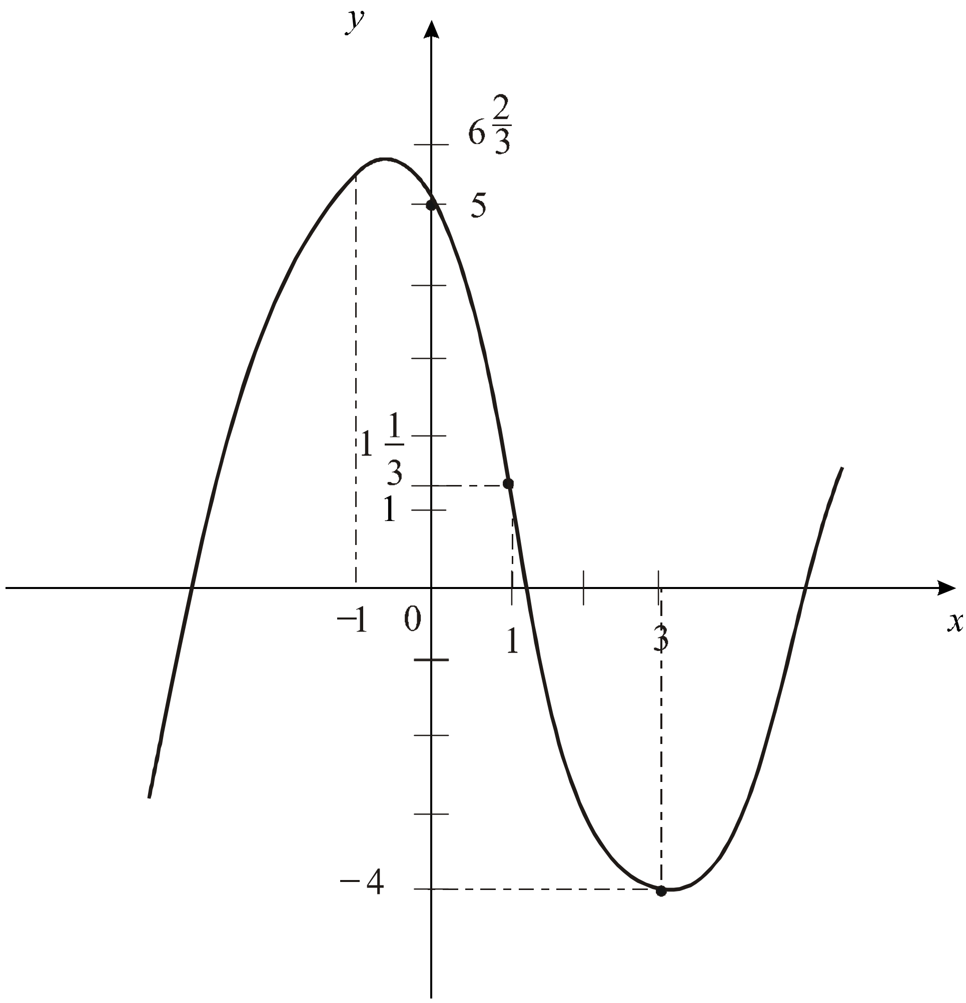


Рис. График функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

Задачи для самостоятельного решения:

1) Найти производные второго порядка:

а) $y = 5x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$; *б*) $y = \ln 5x$; *в*) $y = xe^{2x}$.

В задачах 2—7 найти дифференциалы функций:

2) $y = 3x^2 + 4$;

3) $y = 3^{-x^2}$;

4) $z = \frac{\sin 4t}{6}$;

5) $z = 5\cos 2y$.

6) Исследуйте на монотонность и экстремумы следующие функции:

а) $y = 2x^4 - x$;

б) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$;

в) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$.

7) Найдите интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба следующих функций:

а) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$;

б) $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$;

в). $y = \frac{x}{1 + x^2}$

Ответы:

1) *а*) $y'' = 80x^3 - \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$; *б*) $y'' = -\frac{1}{x^2}$; *в*) $y'' = 4e^{2x}(1 + x)$;

2) $dy = 6xdx$;

3) $dy = -2\ln 3 \cdot 3^{-x^2} xdx$;

4) $dz = \frac{2}{3}\cos 4tdt$;

5) $dz = -10\sin 2ydy$.

6) *а*) убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$ и возрастает на $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; $x = \frac{1}{8}$ — точка минимума; $y\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{2048}$ — минимум;

б) убывает на $(1; 2)$ и возрастает на $(-\infty; 1)$, $(2; +\infty)$; $x = 2$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума; $y(2) = -4$ — минимум, $y(1) = -3$ — максимум;

в) убывает на $(1; 3)$ и возрастает на $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$; $x = 3$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума; $y(3) = 0{,}3$ — минимум, $y(1) = 0{,}5$ — максимум;

7) *а*) график выпуклый на $(2; +\infty)$ и вогнутый на $(-\infty; 2)$; $\left(2; \frac{16}{3}\right)$ — точка перегиба;

б) график выпуклый на $(5; +\infty)$ и вогнутый на $(-\infty; 5)$; $(5; 5)$ — точка перегиба;

в) график выпуклый на $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(0; \sqrt{3})$ и вогнутый на $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$; $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ — точки перегиба.