П р и м е р 1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt[5]{x^2}$;   б) $y=\dfrac{1}{x^3}$;   *в*) $y=x^3\cdot x^4$.

Решение.

Требуется найти производные степенных функций. Для нахождения производных необходимо применить свойства степеней:

1. $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$;

2. $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$;

3. $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$;

4. $\dfrac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$;

5. $\left(x^m\right)^n=x^{m\cdot n}$.

Используя формулу (3), получаем:

а) $y'=\left(\sqrt[5]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{5x^{\frac{3}{5}}}=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$;

б) $y'=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$;

в) $y'=\left(x^3\cdot x^4\right)'=\left(x^{3+4}\right)'=\left(x^7\right)'=7x^{7-1}=7x^6$.

П р и м е р 2. Найти производную функции $y=2x^4+\dfrac{3}{x}-5^x+7$.

Решение.

Применяя правила (1), (2), (3) и формулы (3), (4), получаем:

$$y'=\left(2x^4+\frac{3}{x}-5^x+7\right)'=2\left(x^4\right)'+3\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(5^x\right)'+7'=$$

$$=2\cdot 4x^3+3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+5^x\ln 5+0=8x^3-\frac{3}{x^2}+5^x\ln 5$$

П р и м е р 3. Найти производную функции $y=e^x\cdot\cos x$.

Решение.

Данная функция представляет собой произведение двух функций. Поэтому для нахождения производной необходимо применить правило дифференцирования (3), а также формулы (5), (9):

$$y'=\left(e^x\cdot\cos x\right)'=\left(e^x\right)'\cdot\cos x+e^x\cdot\left(\cos x\right)'=$$

$$=e^x\cdot\cos x+e^x\cdot(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x).$$

П р и м е р 4. Найти производную функции $y=\dfrac{4^x}{\log_5 x}$.

Решение.

Данная функция представляет собой отношение двух функций. Поэтому для нахождения производной необходимо применить правило дифференцирования (4), а также формулы (4) и (6):

$$y'=\left(\frac{4^x}{\log_5 x}\right)'=\frac{\left(4^x\right)'\cdot\log_5 x-4^x\cdot\left(\log_5 x\right)'}{(\log_5 x)^2}=$$

$$=\frac{4^x\ln 4\cdot\log_5 x-4^x\cdot\dfrac{1}{x\ln 5}}{(\log_5 x)^2}=\frac{4^x(x\ln 5\cdot\ln 4\cdot\log_5 x-1)}{x\ln 5(\log_5 x)^2}.$$

П р и м е р 5. Найти производные функций:

а) $y=\ln\left(ctg 4x\right)$;

б) $y=arctg\sqrt{x}$.

Решение.

б) Данная функция является сложной. Обозначим $ctg 4x=u$. Тогда $y=\ln u$. Используя (7^*) и (11^*) имеем:

$$y'=\frac{1}{ctg 4x}\cdot\left(ctg 4x\right)'=\frac{1}{ctg 4x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 4x}\right)\cdot\left(4x\right)'=-\frac{4}{ctg 4x\cdot\sin^2 4x}$$

б) Данная функция является сложной. Обозначим $\sqrt{x}=u$ Тогда $y=arctg u$. Используя (14^*) и (3), имеем:

$$y'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

П р и м е р 6. Найти производные функций:

a) $y=x^3-\dfrac{3}{5x^4}+3\sqrt[3]{x^2}-5$;

b) $y=\arccos 2x\cdot\sin 3x$;

c) $y=\dfrac{tg 4x}{3^{5x}}$;

d) $y=\left(e^{2x}+\ln 7x\right)^4$.

Решение.

a) Упростим функцию:

$$y=x^3-\frac{3}{5x^4}+3\sqrt[3]{x^2}-5=x^3-\frac{3}{5}x^{-4}+3x^{\frac{2}{3}}-5\,.$$

Найдем производную, используя правила дифференцирования

$$C'=0\,,$$

$$\left(u+v\right)'=u'+v'\,,$$

$$(Cu)' = Cu'$$

и формулу дифференцирования степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Получим:

$$y' = 3x^2 - \frac{3}{5}\cdot(-4)x^{-5} + 3\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{12}{5x^5} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = 3x^2 + \frac{12}{5x^5} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

b) Найдем производную, используя правило дифференцирования произведения

$$(uv)' = u'v + uv'$$

и формулы дифференцирования

$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u',$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$$

Получим:

$$y' = (\arccos 2x \cdot \sin 3x)' = (\arccos 2x)' \sin 3x + \arccos 2x (\sin 3x)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)' \sin 3x + \arccos 2x \cdot \cos 3x \cdot (3x)' =$$

$$-\frac{2\sin 3x}{\sqrt{1-(2x)^2}} + 3\arccos 2x \cdot \cos 3x.$$

c) Найдем производную, используя правило дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

и формулы дифференцирования

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

Получим:

$$y' = \left(\frac{tg4x}{3^{5x}}\right)' = \frac{(tg4x)' \cdot 3^{5x} - tg4x(3^{5x})'}{(3^{5x})^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot(4x)' \cdot 3^{5x} - tg4x \cdot 3^{5x}\ln 3 \cdot (5x)'}{3^{10x}} =$$

$$= \frac{\frac{4\cdot 3^{5x}}{\cos^2 4x} - 5tg4x\cdot 3^{5x}\ln 3}{3^{10x}} = \frac{3^{5x}\left(\frac{4}{\cos^2 4x} - 5tg4x\ln 3\right)}{3^{10x}} =$$

$$\frac{\frac{4}{\cos^2 4x} - 5tg4x\ln 3}{3^{5x}}.$$

c) Найдем производную, используя формулы дифференцирования

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u',$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u',$$

$$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}u'.$$

Получим:

$$y' = \left(\left(e^{2x} + \ln 7x\right)^4\right)' = 4\left(e^{2x} + \ln 7x\right)^3\left(e^{2x} + \ln 7x\right)' =$$

$$= 4\left(e^{2x} + \ln 7x\right)^3\left(e^{2x} \cdot (2x)' + \frac{1}{7x} \cdot (7x)'\right) =$$

$$= 4\left(e^{2x} + \ln 7x\right)^3\left(2e^{2x} + \frac{7}{7x}\right) = \left(e^{2x} + \ln 7x\right)^3\left(2e^{2x} + \frac{1}{x}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения:

[В задачах 1—16 найти производные функций:

1) $y = x^4 - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x};$

2) $y = 4x^5 - \frac{3}{x^2} + 5;$

3) $y = 3\sqrt[7]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 5x;$

4) $y = \left(2x+3\right)^3;$

5) $y = \sqrt[4]{3x-7};$

6) $y = \cos^3 2x;$

7) $y = \left(\sin 4x - 5^x\right)^6;$

8) $y = 2^x \cdot arctg3x;$

9) $y = tg3x \cdot e^{4x};$

10) $y = (5\sqrt{x}+4) \cdot \log_3(3x-2);$

11) $y = e^2 \cdot \log_5 \sqrt{x+2};$

12) $y = 3 \cdot \ln \sqrt{\sin 2x};$

13) $y = \frac{ctg5x}{\ln 2x};$

14) $y = \frac{5x-7}{\cos^3 x};$

15) $y = \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{x}};$

16) $y = \sin^2 arcctg3x.$

17) Приведите примеры задач, приводящих к понятию производной.

18) Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = 4x - 3$. Найдите значение производной $y = f'(x_0)$.

Ответы:

1) $y' = 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$

2) $y' = 20x^4 + \dfrac{6}{x^3}$;

3) $y' = \dfrac{3}{7\sqrt[7]{x^6}} + \dfrac{3}{\sqrt{x^5}} + 5$;

4) $y' = 6(2x+3)^2$;

5) $y' = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{(3x-7)^3}}$;

6) $y' = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x$;

7) $y' = 6(\sin 4x - 5^x)^5 \cdot (4\cos 4x - 5^x \ln 5)$;

8) $y' = 2^x(\ln 2 arctg 3x + \dfrac{3}{1+9x^2})$;

9) $y' = e^{4x}(\dfrac{3}{\cos^2 3x} + 4tg3x)$;

10) $y' = \dfrac{5\log_3(3x-2)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3(5\sqrt{x}+4)}{(3x-2)\ln 3}$;

11) $y' = \dfrac{e^2}{2\ln 5(x+2)}$;

12) $y' = 3\,ctg 2x$;

13) $y' = -\dfrac{5x\ln 2x + ctg5x\sin^2 5x}{x\sin^2 5x \ln^2 2x}$;

14) $y' = \dfrac{5\cos^3 x + 3(5x-7)\cos^2 x\sin x}{\cos^6 x}$;

15) $y' = \dfrac{6x - \arcsin 3x\sqrt{1-9x^2}}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-9x^2}}$;

16) $y' = -\dfrac{6\sin arcctg 3x \cdot \cos arcctg 3x}{1+9x^2}$;

18) 4.