Производная функции. Задачи, приводящие к понятию производной. Механический и геометрический смыслы производной

Краткие теоретические сведения:

1. Определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке *X*. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначения производной функции: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

2. Механический и геометрический смыслы производной.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, то есть

$$f'(x_0) = k.$$

Так как угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла α наклона касательной к положительному направлению оси Ox, то

$$f'(x_0) = tg\alpha.$$

Механический смысл производной: если $s = s(t)$ — закон движения точки, где s — путь, t — время, то производная пути по времени $s'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0, то есть

$$s'(t_0) = v(t_0).$$

Если рассматривается какой-либо другой физический процесс, то производная есть скорость протекания этого процесса.

3. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью.

Теорема: Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, то есть если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Таким образом, непрерывность функции — необходимое, но не достаточное условие ее дифференцируемости.

Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций

Краткие теоретические сведения:

1. Основные правила дифференцирования.

1) Производная постоянной равна нулю, то есть

$$C' = 0,$$

где $C = \text{const}$.

2) Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций, то есть

$$\left(u+v\right)' = u' + v'.$$

3) Производная произведения двух дифференцируемых функций находится по формуле

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие: Постоянный множитель можно вынести за знак производной, то есть

$$\left(Cu\right)' = Cu'.$$

4) Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

5) Если $y = f\left(u\right)$ и $u = g\left(x\right)$ — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f\left(g(x)\right)$ существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x, то есть

$$y'\left(x\right) = y'\left(u\right) \cdot u'\left(x\right).$$

6) Для дифференцируемой функции $y = f\left(x\right)$ с производной $y'\left(x\right) \neq 0$, производная обратной функции $x = g\left(y\right)$ равна обратной величине производной данной функции, то есть находится по формуле:

$$x'\left(y\right) = \frac{1}{y'\left(x\right)}.$$

2. Производные основных элементарных функций.

Таблица 1. Формулы дифференцирования

Для функции простого аргумента $y=f(x)$	*Для сложной функции* $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$
1. $(C)'=0$	
2. $(x)'=1$	
3. $(x^n)'=n\,x^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	3*. $(u^n)'_x=n\,u^{n-1}\,u'_x$ $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}u'_x$ $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'_x$
4. $(a^x)'=a^x\ln a$	4*. $(a^u)'_x=a^u\ln a\,u'_x$
5. $(e^x)'=e^x$	5*. $(e^u)'_x=e^u u'_x$
6. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	6*. $(\log_a u)'_x=\frac{1}{u\ln a}\,u'_x$
7. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	7*. $(\ln u)'_x=\frac{1}{u}u'_x$
8. $(\sin x)'=\cos x$	8*. $(\sin u)'_x=\cos u\,u'_x$
9. $(\cos x)'=-\sin x$	9*. $(\cos u)'_x=-\sin u\,u'_x$
10. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	10*. $(\operatorname{tg} u)'_x=\frac{1}{\cos^2 u}\,u'_x$
11. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	11*. $(\operatorname{ctg} u)'_x=-\frac{1}{\sin^2 u}\,u'_x$
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12*. $(\arcsin u)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,u'_x$
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13*. $(\arccos u)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'_x$
14. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	14*. $(\operatorname{arctg} u)'_x=\frac{1}{1+u^2}u'_x$
15. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	15*. $(\operatorname{arcctg} u)'_x=-\frac{1}{1+u^2}\,u'_x$