Плоскость и прямая в пространстве

Краткие теоретические сведения:

1. Виды уравнений плоскости..

1) Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ называется *нормальным вектором* плоскости.

2) *Общее уравнение плоскости* имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.20)$$

где A, B, C, D — действительные числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат.
2. Если $A = 0$, то плоскость проходит параллельно оси Ox.
3. Если $B = 0$, то плоскость проходит параллельно оси Oy.
4. Если $C = 0$, то плоскость проходит параллельно оси Oz.
5. Если $A = D = 0$, то плоскость проходит через ось Ox.
6. Если $B = D = 0$, то плоскость проходит через ось Oy.
7. Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через ось Oz.

3) Если плоскость проходит через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, то ее уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Если плоскость отсекает на осях координат отрезки a, b, c, то есть проходит через точки $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*.

2. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Виды уравнения прямой в пространстве.

1) Если прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, то ее уравнения имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой.*

Вектор $\vec{s} = (m; n; p)$ называется *направляющим вектором* прямой.

2) Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$