Исследование систем линейных уравнений по теореме Кронекера-Капелли

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными (2.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капелли позволяет, не решая системы, ответить на вопрос: имеет ли система решение, а если имеет, то сколько.

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ — матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных;

$$\widetilde{A} = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right.$$ — расширенная матрица системы.

Пусть $r(A) = r$ — ранг матрицы системы линейных уравнений,

$r\left(\widetilde{A}\right)$ — ранг расширенной матрицы системы,

n — число неизвестных

***Теорема Кронекера-Капелли*:** для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r\left(\widetilde{A}\right) = r$.

Если ранг r равен числу неизвестных n, то система имеет единственное решение, т.е. является определенной. Если ранг r меньше числа неизвестных n, то система имеет бесконечное множество решений, т.е. является неопределенной.

Схема исследования системы линейных уравнений представлена на рисунке.

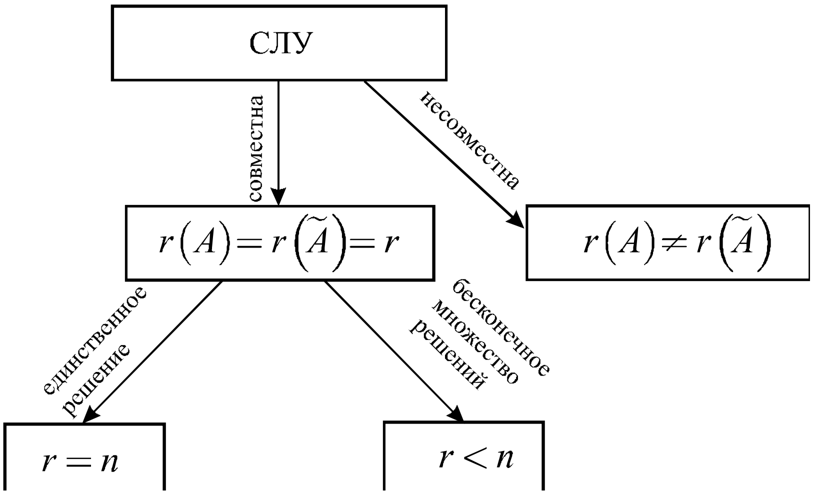

Рис.

Система m линейных уравнений с n неизвестными называется системой линейных однородных уравнений, если все их свободные члены равны нулю.

Такая система имеет вид
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = 0, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение (0;0;…0). Если $m=n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение.

Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. $r(A)<n$.

Обозначим решения системы (2.2) $x_1=k_1,\ x_2=k_2 \ldots x_n=k_n$ в виде строки $e_1=(k_1,\ k_2 \ldots k_n)$.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. Если строка $e_1=(k_1,\ k_2 \ldots k_n)$ – решение системы (2.2), то и строка $\lambda e_1=(\lambda k_1,\ \lambda k_2 \ldots \lambda k_n)$ – решение системы (2.2).
2. Если строки $e_1=(k_1,\ k_2 \ldots k_n)$ и $e_2=(l_1,\ l_2 \ldots l_n)$– решения системы (2.2), то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация $c_1e_1+c_2e_2=(c_1k_1+c_2l_1,\ c_1k_2+ c_2l_2 \ldots c_1k_n +c_2l_n)$ – также решение данной системы.

Система линейно независимых решений $e_1,\ e_2 \ldots e_k$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (2.2) является линейной комбинацией решений $e_1,\ e_2 \ldots e_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений (2.2) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы (2.2) состоит из $n-r$ решений.

Поэтому общее решение системы (2.2) линейных однородных уравнений имеет вид $c_1e_1+c_2e_2+\ldots+ c_ke_k$, где $e_1, e_2\ldots e_k$ – любая фундаментальная система решений; $c_1, c_2, \ldots c_k$ – произвольные числа; $k=n-r$.