Полное исследование
функций и построение графиков

Рассмотренные ранее вопросы применения производных y' и y'' позволяют провести полное исследование функции и построить ее график. Такое исследование целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на непрерывность.
3. Исследовать функцию на чётность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно).
6. Определить интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума.
7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.
8. Найти асимптоты сначала вертикальные, а затем наклонные.
9. Используя результаты исследования построить график функции (при необходимости взять несколько дополнительных точек).

Пример. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{x^2}{x-2}.$$

Решение

1. Функция существует, а значит, и непрерывна при всех $x \neq 2$.

2. В точке $x = 2$ функция терпит разрыв.

3. Проверим функцию на четность и нечетность. Для функции $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ найдем $f(-x) = \frac{x^2}{-x-2}$.

Очевидно, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то есть данная функция не является ни четной, ни нечетной, а является функцией общего вида. Следовательно, ее график не будет симметричным ни относительно оси Oy, ни относительно точки O.

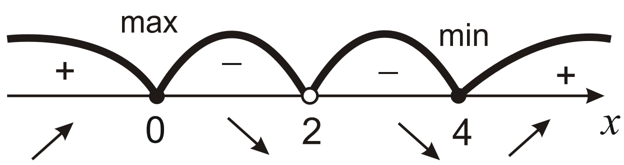
4. Находим точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ получим $y = 0$. Значит, точкой пересечения с осью Ox будет точка O(0; 0). А так как при $y = 0$ получим $x = 0$, то эта точка будет также точкой пересечения с осью Oy.

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Для этого найдем

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{\left(x-2\right)^2}=\frac{x^2-4x}{\left(x-2\right)^2}=\frac{x(x-4)}{\left(x-2\right)^2}.$$

Очевидно, что $D(y')$ = (–∞; 2) ∪ (2; +∞;). В этой области имеем две критические точки x_1 = 0 и x_2 = 4 (точки, где y' = 0). Далее составляем таблицу 5.

Таблица 5. Изменение знака y' и поведение функции y

<table>
<tr><td>Знак производной
$y'=\frac{x(x-4)}{\left(x-2\right)^2}$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Поведение
функции $y=\frac{x^2}{x-2}$</td></tr>
</table>

Из таблицы 5 видно, что

$x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{\max}=\left.\frac{x^2}{x-2}\right|_{x=0}=0$,

$x_2 = 4$ — точка минимума, $y_{\min}=\left.\frac{x^2}{x-2}\right|_{x=4}=8$.

6. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. Для этого нужно найти y'' и исследовать ее знак

$$y''=\left(\frac{x^2-4x}{\left(x-2\right)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)\cdot 2(x-2)}{\left(x-2\right)^4}=\frac{8}{\left(x-2\right)^3}.$$

Очевидно, что при $x < 2$ $y'' < 0$ (имеем выпуклый график), а при $x > 2$ $y'' > 0$ (имеем вогнутый график). Точек перегиба нет, хотя y'' меняет знак в окрестности точки $x_2 = 2$, так как в этой точке функция не существует.

7. Исследуем график функции на наличие асимптот. Вертикальные асимптоты будем искать в точках разрыва функции, т.е. в точке $x = 2$.

Так как $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\infty$, то прямая x = 2 будет вертикальной асимптотой. Теперь ищем невертикальные асимптоты. Их уравнение имеет вид: $y = kx + b$, где в соответствии с формулами

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x},\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx).$$

В нашем случае:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} : x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-2} = 2\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2} = 2\cdot 1 = 2.$$

Таким образом, $k = 1$, $b = 2$. Поэтому прямая $y = x + 2$ является невертикальной (наклонной) асимптотой.

8. Используя полученные сведения, строим график функции (рис. 9).

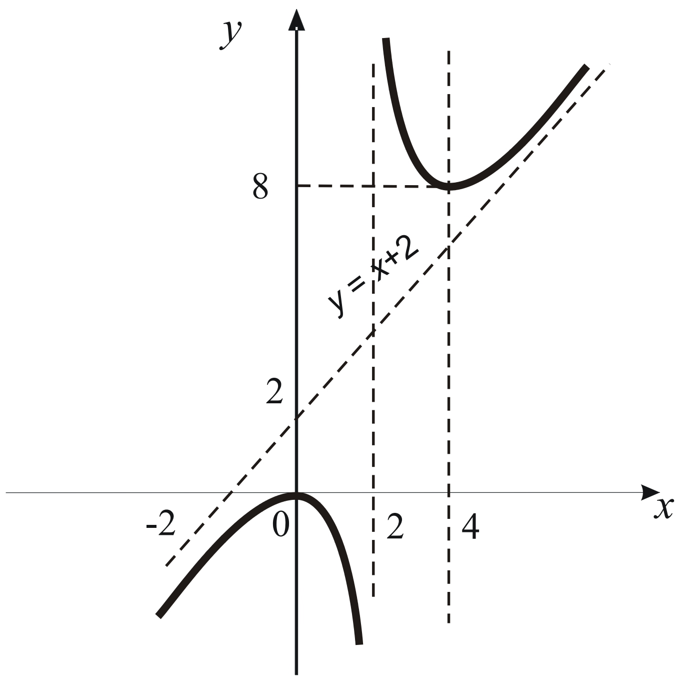


Рис. 9. График функции $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

Построение графика удобнее начинать с построения точек пересечения с осями координат, экстремальных точек, точек перегиба и асимптот.