1.22. Решение произвольных неравенств методом интервалов

Для решения неравенства $f(x) > 0$ ($\geq$, $<$, $\leq$) методом интервалов надо:

1) найти область определения $D(f)$ функции $f(x)$ и изобразить её на числовой оси;

2) найти точки x_k, в которых функция $f(x)$ обращается в ноль: $f(x) = 0 \Rightarrow$; $x = x_1$, $x = x_2$,…;

3) изобразить точки x_1, x_2,… на числовой оси и разбить область $D(f)$ на интервалы;

4) выяснить знак функции $f(x)$ на каждом из полученных интервалов (для этого достаточно определить знак $f(x)$ в какой-нибудь одной точке интервала);

5) выбрать те интервалы, на которых выполняется данное неравенство (эти интервалы и составят искомое решение).

Примеры для самоконтроля

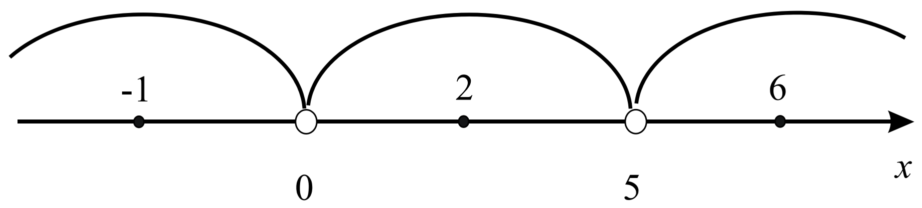
Решить методом интервалов данные неравенства:

1. $x^2 - 5x < 0$. Здесь $f(x) \equiv x^2 - 5x$,

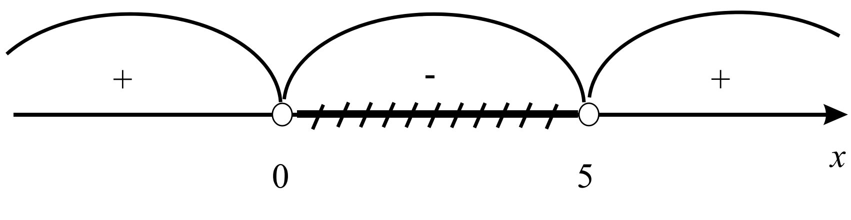
$D(f) = (-\infty; \infty)$ — вся числовая ось.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 5.$

Изображая эти точки на числовой оси (в области $D(f)$), получаем интервалы



Так как $f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) > 0$, $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 < 0$, $f(6) = 6^2 - 5 \cdot 6 > 0$, то функция $f(x) = x^2 - 5x$ имеет на указанных интервалах следующие знаки:



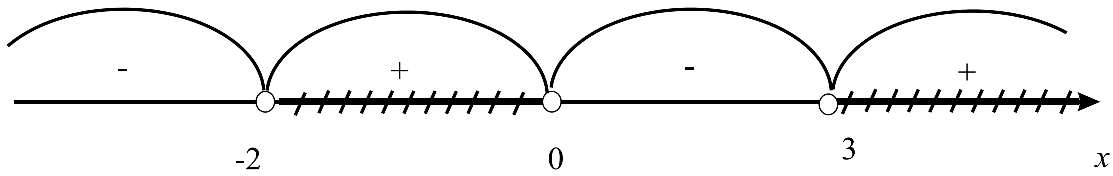
Очевидно, что наше неравенство выполняется на интервале (0;5). Следовательно, ответ: $x \in (0; 5)$.

2. $\dfrac{x(x+2)}{x-3} > 0.\quad f(x) \equiv \dfrac{x(x+2)}{x-3},\quad D(f)$ – все x кроме $x = 3$.

Точками, в которых $f(x) = 0$, будут:

$x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$

Изображая на оси Ox область $D(f)(x \neq 3)$, точки $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ и определяя знак $f(x)$ на каждом интервале, получаем



Ответ очевиден: $x \in (-2; 0) \cup (3; +\infty)$.

3. $\dfrac{x(x+2)}{x-3} \geq 0$. Учитывая предыдущий пример, получим ответ: $x \in [-2; 0] \cup (3; +\infty)$.