

1.21. Решение произвольных неравенств с использованием их общих свойств

Если $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ или $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, то, опираясь на общие свойства неравенств (см. 1.16), получаем

$$1. f_1(x)f_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$2. f_1(x)f_2(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) \leq 0, \\ f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) > 0, \\ f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) < 0. \end{cases}$$

$$4. \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) \geq 0, \\ f_2(x) < 0, \\ f_1(x) \leq 0, \\ f_2(x) > 0. \end{cases}$$

Примечание. Аналогично решаются неравенства со знаками $>$, $<$.

Примеры для самоконтроля

Решить неравенства:

$$1. (x-1)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq 4, \end{cases} \Rightarrow x \geq 4, \text{ то есть } x \in [4; +\infty), \\ \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x-4 \leq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \leq 4, \end{cases} \Rightarrow x \leq 1, \text{ то есть } x \in (-\infty; 1]. \end{cases}$$

Объединяя найденные значения, получим ответ:

$$x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty).$$

$$2. \frac{x+2}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+2 \leq 0, \\ x-5 > 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq -2, \\ x > 5, \end{array} \right. \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ то есть нет решений,} \\ \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0, \\ x-5 < 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -2, \\ x < 5, \end{array} \right. \Rightarrow x \in [-2; 5). \end{array} \right.$$

Ответ: $x \in [-2; 5)$.

$$3. \frac{x}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ x-3 > 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ x > 3, \end{array} \right. \Rightarrow x > 3, \text{ то есть } x \in (3; +\infty), \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x-3 < 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x < 3, \end{array} \right. \Rightarrow x < 0, \text{ то есть } x \in (-\infty; 0). \end{array} \right.$$

Объединяя найденные значения, получим ответ:

$x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.